



# VII CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

"GENERACION DE NUEVAS TÉCNICAS DE DIAGNÓSTICO Y TRATAMIENTO"

16-18  
junio 2016

Unidad de Seminarios, BUAP



## GENERACIÓN DE FUENTES BIOELÉCTRICAS CORTICALES ACTIVADAS POR FUENTES SUBCORTICALES QUE PRODUCEN EL MISMO EEG.

Oliveros Oliveros José Jacobo\*\*, Morín Castillo María Montserrat\*, Javier Mozqueda Lafarga\*\*, Gabriel Guarneros Bejarano\*\*, García Aguilar Gregorio\*\*, Ramírez Díaz Héctor&

\*\* Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla. México,

[javiermozqueda@gmail.com](mailto:javiermozqueda@gmail.com), [oliveros@fcm.buap.mx](mailto:oliveros@fcm.buap.mx), [fraguela@fcm.buap.mx](mailto:fraguela@fcm.buap.mx),  
[g4b0ggb@gmail.com](mailto:g4b0ggb@gmail.com)

\*Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP, Puebla. México, [morin.monserrat@gmail.com](mailto:morin.monserrat@gmail.com)

\*\*\*Facultad de Psicología, BUAP, Puebla, México, [gregorio.garcia@correo.buap.mx](mailto:gregorio.garcia@correo.buap.mx)

& Instituto Tecnológico Superior de Eldorado. Sinaloa, México [cronopio23@hotmail.com](mailto:cronopio23@hotmail.com)

## RESUMEN

El electroencefalograma (EEG) es una de las principales técnicas de investigación no invasiva del cerebro y capta la actividad eléctrica de grandes conglomerados de neuronas actuando simultáneamente por medio de electrodos colocados sobre el cuero cabelludo. Estos conglomerados son llamados fuentes bioeléctricas, las cuales pueden localizarse en la corteza o en el volumen cerebral. Aunque han sido reportadas contribuciones subcorticales registradas en el EEG, se cree que los principales contribuyentes son macrocolumnas corticales, es decir, fuentes formadas por neuronas piramidales corticales activadas de manera sincrónica. Para explicar el hecho de que una fuente sub cortical produce un EEG, se propone que existe una fuente cortical que genera el mismo EEG, es decir, dada una fuente sub cortical se considera que hay una fuente cortical asociada a ella. En este trabajo por medio de un modelo de medio conductor se propone una explicación de este fenómeno.

### 1. INTRODUCCIÓN

La Electroencefalografía es una de las técnicas más conocidas de investigación no invasiva del cerebro. Por medio de ella se registran los potenciales en un electroencefalograma; estos potenciales provienen de la actividad eléctrica de los tejidos excitables, y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre un electrodo explorador y otro de referencia. Aunque han sido reportadas contribuciones subcorticales registradas en el EEG, se cree que los principales contribuyentes son macrocolumnas corticales, es decir, fuentes formadas por neuronas piramidales corticales activadas de manera sincrónica. En este trabajo por medio de un modelo matemático, que toma en cuenta las propiedades conductoras de la cabeza y la aproximación cuasi estática de las ecuaciones de Maxwell, se logra relacionar a una fuente subcortical generadora del EEG con una única fuente cortical que genera el mismo EEG. Para ello el modelo matemático que corresponde a un problema de valores en la frontera, se separa en dos sub problemas que permiten establecer una relación entre la fuente sub cortical que produce el EEG y una fuente cortical(asociada a la primera) que produce el mismo EEG. Esto da una posible explicación de la generación del EEG por una fuente en corteza cerebral la cual es activada por una fuente subcortical.



## 2. MODELO MATEMÁTICO

Se considera que la cabeza humana, considerada como un volume de medio conductor, está dividida en dos zonas disjuntas  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  donde  $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$  representa a la cabeza,  $\Omega_1$  al cerebro,  $\Omega_2$  al resto de la cabeza; supondremos que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son conductividades constantes de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , respectivamente;  $S_1$  representa a la corteza cerebral (superficie de separación entre el cerebro y el resto de la cabeza) y  $S_2$  al cuero cabelludo. El estudio del Problema Inverso Electroencefalográfico (PIE) para fuentes volumétricas  $f$  puede realizarse a través del siguiente problema de valores en la frontera [1, 2, 4, 7, 9, 10, 11]:

$$\Delta u_1 = f \quad \text{en } \Omega_1, \tag{1}$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \tag{2}$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } S_1, \tag{3}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{en } S_1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{en } S_2, \tag{5}$$

donde  $f$  es llamada la fuente,  $u_i = u|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $u$  representa al potencial eléctrico en  $\Omega$ , y  $\frac{\partial u_i}{\partial n_j}$ ,  $i = 1, 2$  denota a la derivada normal  $u_i$  sobre  $S_j$  respecto al vector normal unitario  $n_j$ ,  $j = 1, 2$ . Las condiciones de frontera (3)-(4) las condiciones de transmisión y la condición (5) se obtiene al considerar que la conductividad del aire es cero. Llamaremos a este problema de frontera electroencefalográfico (PFE).

De las fórmulas de Green se deduce la siguiente condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega_1} f(x) dx = 0. \tag{6}$$



El estudio del problema de identificación de  $f$  dada en (1) puede realizarse usando el problema de valores en la frontera (1)–(5) y la condición de frontera adicional:

$$u_2 = V. \quad (7)$$

donde  $V$  representa al EEG medido en el cuero cabelludo.

### 3. SEPARACIÓN DEL PROBLEMA EN DOS SUBPROBLEMAS

La solución del problema (1)-(5) está dado por:

$$u(x) = \begin{cases} \hat{u} + w_1 & x \in \Omega_1 \\ w_2 & x \in \Omega_2. \end{cases} \quad (8)$$

donde  $w$  y  $\hat{u}$  satisfacen los siguientes problemas de contorno:

$$\Delta w_1 = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (9)$$

$$\Delta w_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (10)$$

$$w_1 = w_2 \quad \text{en } S_1, \quad (11)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_1} + g \quad \text{en } S_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{en } S_2, \quad (13)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u} &= f \quad \text{en } \Omega_1, \\ \hat{u} &= 0 \quad \text{en } S_1, \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $w_i = w|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$  y  $g = -\sigma_1 \frac{\partial \hat{u}}{\partial n_1}$ . La función  $g$  puede interpretarse como una fuente

definida sobre la corteza cerebral. La condición de compatibilidad para la función  $g$  está dada por

$$\int_{S_1} g(x) dx = 0.$$



La solución del problema (9)-(13) es única en el espacio ortogonal a las constantes [9]. La solución del problema (14)-(15) está dada por

$$\int_{\Omega_1} G(x, y) f(y) dy$$

donde  $G(x, y)$  es la función de Green para la ecuación de Poisson con una condición de contorno de Dirichlet [7]:

$$\begin{aligned} \Delta_x G(x, y) &= \delta(x - y) && \text{en } \Omega_1, \\ G(x, y) &= 0 && \text{en } \partial\Omega_1. \end{aligned}$$

En este caso el problema inverso puede ser formulado de la manera siguiente:

1. Dado la medición  $V$  hallar la fuente cortical  $g = -\sigma_1 \frac{\partial \hat{u}}{\partial n_1}$  del problema (7)-(13).
2. Hallar la fuente subcortical  $f$  del problema (14)-(15) usando  $g$  obtenida en el paso 1.

#### 4. RESULTADOS DE UNICIDAD PARA EL PROBLEMA INVERSO

En esta sección se demuestra que dado el EEG sobre el cuero cabelludo, se puede encontrar una única fuente no sólo a partir de ese EEG sino a partir de la fuente cortical asociada a ella para el caso en que la fuente pueda representarse funciones campana. Se tiene el primer resultado de unicidad.

***Dada una medición  $V$  sobre  $S_2$  existe (salvo constantes) una única fuente  $g$ , que satisface la condición de compatibilidad, que la produce.***

La demostración presentada en la referencia [2] utiliza técnicas de la teoría de potencial. Aquí damos una demostración diferente.

Supongamos que existen dos fuentes  $\tilde{g}$  y  $\hat{g}$  que producen los potenciales  $\tilde{w}$  y  $\hat{w}$  respectivamente y que generan la misma medición  $V$ . Sea  $w = \tilde{w} - \hat{w}$ . Se tiene que  $w$  es armónica en  $\Omega_2$  y que satisface sobre  $S_2$  las condiciones de frontera  $\frac{\partial u}{\partial n_2} = 0$  y  $u = 0$ . Estos son

conocidos como datos de Cauchy. Debido a la unicidad de solución de este problema se halla que  $w$  es cero en  $\Omega_2$ . Restringiendo  $w$  a  $S_1$  hallamos que es armónica en  $\Omega_1$  y que se anula en  $S_1$ . Por unicidad de solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, se halla que  $w$  es cero en  $\Omega_1$ . Usando las condiciones de frontera (13) sobre los flujos de corriente, se halla que  $\tilde{g} = \hat{g}$ . Esto termina la prueba.





# VII

CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

16-18  
junio 2016

Unidad de Seminarios, BUAP

"GENERACION DE NUEVAS TECNICAS DE DIAGNÓSTICO Y TRATAMIENTO"



El uso de fuentes equivalentes, representado matemáticamente por dipolos eléctricos, para representar la actividad fuentes bioeléctricas ha sido de gran utilidad para el estudio del PIE [3], [5], [6],[10]. Por ejemplo, los focos epilépticos han sido modelados como corrientes dipolares que pueden representar a través de la llamada delta de Dirac. Para el estudio que se realizará se supondrá que la fuente bioeléctrica sub cortical puede ser representada en esa forma. Más aún, debido a que la delta de Dirac es el límite de funciones campana, en lo que sigue supondremos que la fuentes subcorticales se representa en esta forma. Se tiene en este caso el siguiente resultado de unicidad:

***Dos fuentes descritas por funciones campana que representen generadores bioeléctricos que no se intersectan, no pueden producir el mismo EEG.***

Combinando los resultados anteriores se halla que:

***La fuente subcortical  $f$  se puede recuperar de manera única a partir de la fuente cortical  $g$  recuperada del EEG.***

## 5. CONCLUSIÓN

Se realiza una propuesta, a través de un modelo matemático, para demostrar que las fuentes subcorticales activan una fuente cortical que es la que produce el EEG medido en el cuero cabelludo. Para ello se separa el problema de contorno que permite simular el EEG en dos sub problemas cuyo análisis permite obtener la mencionada propuesta. Se demuestra es posible recuperar a la fuente subcortical a partir de la fuente cortical asociada a ella y recuperada por medio del EEG sobre el cuero cabelludo. Esto da la posibilidad de establecer un experimento para validar la propuesta.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Fragueta A, Morín M, Oliveros J. "Inverse electroencephalography for volumetric sources" Mathematics and Computers in Simulation, 2008; 78: 481-492.
2. Fragueta A., Oliveros J., Morín M. "Inverse electroencephalography for cortical sources". Applied Numerical Mathematics, 2005; 55(2): 191-203.
3. Grave R, González S, Gómez C. M. "Bases biofísicas de la localización de los generadores cerebrales del electroencefalograma. Aplicación de un modelo tipo distribuido a la localización de focos epilépticos" Revista de Neurología, 2004; 39: 748-756.
4. Heller L. "Return Current in Encephalography. Variational Principles" Biophysical Journal, 1990; 5: 601-607.
5. Munck, Van Dijk, Spekreije. "Mathematical Dipoles are Adequate to Describe Realistic Generators of Human Brain Activity" IEEE Transactions on biomedical engineering, 198.
6. Nuñez P. L. Electric Field of the Brain. Oxford Univ. Press, New York (USA), 1981.
7. Sarvas J. "Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic Inverse Problem" Phys. Med. Biol., 1987, 32(1): 11-22.
8. Tijonov A. N., Samarsky A. A., 1980. Ecuaciones de la Física-Matemática. Editorial Mir Moscú.
9. Tsitsas N and Ma P. "Finding a source inside a sphere". Inverse problems. 2012; 28.
10. Ueno S., Ueno K., Iramina K., "Spatio-temporal patterns of meg and eeg activities produced by spreading multiple dipoles" 0-7803-1377-1193 01993 IEEE.
11. Ueno S., Wakisako H. "Determination of the spatial distribution of abnormal EEG and MEG from current dipole in inhomogeneous volume conductor" Il Nuovo Cimento, 1983; 2(D):558-566.