

# Cavidad con pérdidas: una descripción usando superoperadores\*

LUIS M. ARÉVALO-AGUILAR<sup>†</sup> Y HÉCTOR MOYA-CESSA

*Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica*

*Coordinación de Óptica*

*Apartado postal 216, 72000 Puebla, Pue., México*

Recibido el 27 de septiembre de 1995; aceptado el 19 de enero de 1996

**RESUMEN.** Las cavidades con pérdidas son usualmente descritas por ecuaciones maestras, las cuales describen la razón de cambio con respecto al tiempo de una matriz de densidad del campo electromagnético debida a alguna interacción o pérdida. El método más común de resolver una ecuación maestra es convirtiéndola en una ecuación tipo Fokker-Planck. En este artículo estudiamos un procedimiento diferente, el llamado método de superoperadores. Aplicamos este método para el caso de una cavidad en la cual está siendo inyectado un campo electromagnético.

**ABSTRACT.** Cavities with losses are usually described by a master equation. This equation describes the rate of change of the density matrix, with respect to time, of a given electromagnetic field due to an interaction or losses. The most common method of solution of a master equation is to transform it into a Fokker-Planck type equation. In this paper we use another method, the so-called superoperators method. We apply this method to a damped cavity in which an electromagnetic field is injected.

PACS: 42.50.Dv; 42.52.+x

## 1. INTRODUCCIÓN

Los desarrollos recientes en electrodinámica cuántica de cavidades han hecho posible tener condiciones experimentales casi ideales para la interacción entre átomos y campos electromagnéticos en cavidades. En estos experimentos, un solo modo del campo electromagnético es establecido dentro de una cavidad superconductora (en el régimen de microondas), con un factor de calidad  $Q$  extremadamente alto [1]. Sin embargo, para tiempos suficientemente largos, o un factor de calidad no muy grande, las pérdidas debido a los espejos de la cavidad producen efectos notables [2].

Estados no clásicos han sido predichos en la interacción de luz y materia [3]. La mayoría de los estudios de este tipo de interacción están basados en el modelo de Jaynes y Cummings [4], el cual trata la interacción entre un solo átomo de dos niveles y un campo electromagnético en una cavidad sin pérdidas. Este modelo predice “colapsos” y “renacimientos” [5] de la inversión atómica (probabilidad de que el átomo esté en su estado excitado menos la probabilidad de que esté en su estado base). En la región de

---

\* Trabajo apoyado parcialmente por CONACyT.

<sup>†</sup> Becario del CONACyT.

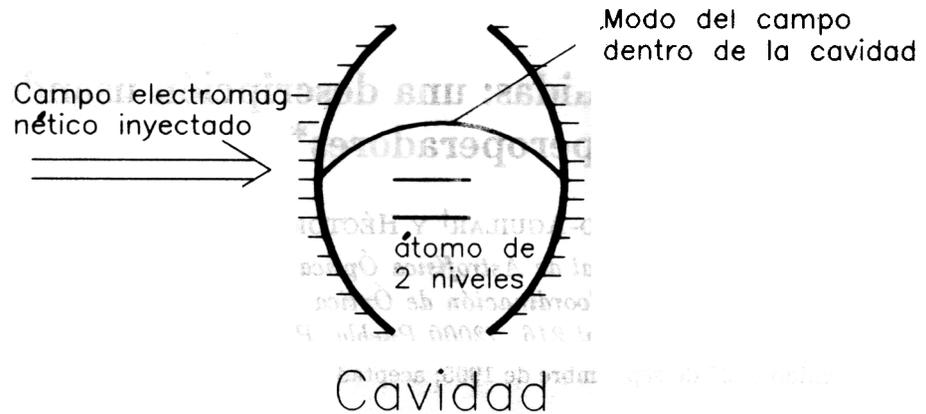


FIGURA 1. Cavidad con pérdidas, en la cual se está inyectando un campo electromagnético.

colapso, presenta estados no clásicos del campo electromagnético conocidos como “gatos de Schrödinger” [6]. Si en este modelo permitimos que entren y salgan átomos de la cavidad, construimos un modelo teórico que llamamos *micromaser* [7], el cual ha sido realizado experimentalmente [1]. Este modelo predice varios tipos de estados no clásicos, entre otros, gatos de Schrödinger y estados de Fock (o número) [3]. Todos estos tipos de estados cuánticos son muy sensitivos a las pérdidas producidas por los espejos de la cavidad, debido a que los efectos de coherencia, de los que dependen en gran medida [2], son rápidamente destruidos.

En este artículo estudiamos cómo resolver una ecuación maestra usando un método llamado de superoperadores. En la Sec. 2, subsección 2.1 describimos cómo se usa este método; en la subsección 2.2, aplicamos los resultados encontrados a un estado inicial coherente; y en la subsección 2.3 estudiamos el comportamiento del sistema en espacio fase. En la Sec. 3 hacemos un análisis de los resultados y obtenemos conclusiones. Finalmente, el artículo consta de un apéndice en donde se investiga la forma de factorizar una exponencial de la suma de dos operadores cuando el conmutador de éstos es proporcional a uno de ellos, lo cual nos permite hacer los cálculos de la subsección 2.1.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Las pérdidas por los espejos son comúnmente estudiadas usando la ecuación maestra [2], transformándola en una ecuación tipo Fokker-Planck. En esta sección mostraremos cómo puede resolverse la ecuación maestra en forma operacional, cuando existe una interacción como la que se muestra en la Fig. 1.

### 2.1. Método de superoperadores

La ecuación maestra para el campo en una cavidad con pérdidas en la que se está inyectando un campo electromagnético, el cual se describe clásicamente, puede ser escrita como

(con  $\hbar = 1$ ) [13,14]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho] + kL[\rho], \quad (1)$$

donde

$$H = -\epsilon(a + a^\dagger) \equiv -\epsilon\hat{C} \quad (2)$$

y

$$L[\rho] = 2a\rho a^\dagger - \rho a^\dagger a - a^\dagger a \rho, \quad (3)$$

donde  $H$  es el hamiltoniano de interacción y  $L[\rho]$  es la parte que describe las pérdidas debidas a los espejos,  $k$  es la razón de pérdida a través de los espejos,  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de aniquilación y de creación, respectivamente, y  $\rho$  es la matriz de densidad que describe al sistema.

Para resolver la Ec. (1) definimos los tres superoperadores siguientes:

$$\begin{aligned} \hat{S}\rho &= i\epsilon(\hat{C}\rho - \rho\hat{C}), \\ \hat{J}\rho &= 2ka\rho a^\dagger, \\ \hat{L}\rho &= -k(\rho a^\dagger a + a^\dagger a \rho). \end{aligned} \quad (4)$$

Por lo que la Ec. (1) nos queda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \hat{S}\rho + \hat{J}\rho + \hat{L}\rho = (\hat{S} + \hat{J} + \hat{L})\rho. \quad (5)$$

La Ec. (5) es una ecuación diferencial que podemos resolver fácilmente por integración directa, obteniéndose

$$\rho(t) = e^{(\hat{S} + \hat{J} + \hat{L})t} \rho(0). \quad (6)$$

El problema ahora consiste en factorizar la exponencial de los tres superoperadores  $\hat{S}$ ,  $\hat{J}$ ,  $\hat{L}$ . Esto lo hacemos en el Apéndice para un caso más general.

Si definimos  $\hat{A} = \hat{S}t$  y  $\hat{B} = (\hat{J} + \hat{L})t$ , nos damos cuenta de que  $[\hat{S}, \hat{J} + \hat{L}] = k\hat{S}$ , por lo que usando el teorema del Apéndice [Ec. (26)], la Ec. (6) nos queda

$$\rho(t) = e^{\frac{\hat{S}}{k}(1-e^{-kt})} e^{(\hat{J} + \hat{L})t} \rho(0), \quad (7)$$

como resultado de haber resuelto la ecuación diferencial para la matriz de densidad por el método de superoperadores.

2.2. Estados coherentes

Como un ejemplo de estados iniciales del campo electromagnético podemos considerar el estado del campo  $\rho(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ , donde  $|\alpha\rangle$  denota un estado coherente, el cual puede ser expresado por estados de Fock como

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Para este estado inicial, obtenemos para la Ec. (7)

$$\rho(t) = e^{\frac{\hat{S}}{k}(1-e^{-kt})} e^{(\hat{J}+\hat{L})t} |\alpha\rangle\langle\alpha|. \tag{8}$$

Aplicando la primera exponencial a la matriz de densidad  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$  nos da [9]

$$e^{(\hat{J}+\hat{L})t} |\alpha\rangle\langle\alpha| = |\alpha e^{-kt/2}\rangle\langle\alpha e^{-kt/2}|. \tag{9}$$

Debemos recordar que  $\hat{J}\rho$  y  $\hat{L}\rho$  describen las pérdidas del sistema. Por lo tanto, notamos que si inicialmente tenemos un estado coherente, las pérdidas por los espejos no lo destruyen, sino que sólo lo atenúan. Esto ocurre únicamente para los estados coherentes. Finalmente, nos falta aplicar la segunda exponencial a otra matriz de densidad descrita por estados coherentes (con amplitud  $\alpha e^{-kt/2}$ )

$$\rho(t) = e^{\frac{\hat{S}}{k}(1-e^{-kt})} |\alpha e^{-kt/2}\rangle\langle\alpha e^{-kt/2}|$$

o

$$\rho(t) = e^{i\epsilon \frac{(1-e^{-kt})}{k} (a+a^\dagger)} |\alpha e^{-kt/2}\rangle\langle\alpha e^{-kt/2}| e^{-i\epsilon \frac{(1-e^{-kt})}{k} (a+a^\dagger)}. \tag{11}$$

Notando que

$$e^{i\epsilon \frac{(1-e^{-kt})}{k} (a+a^\dagger)} |\alpha e^{-kt/2}\rangle = D\left(i\epsilon \frac{1-e^{-kt}}{k}\right) D(\alpha e^{-kt/2}) |0\rangle = e^{i\phi} |\eta + i\delta\rangle,$$

donde  $D(\gamma)$  es el operador de desplazamiento de Glauber [10],  $D(\gamma) = e^{[\gamma a^\dagger - \gamma^* a]}$ , el cual cumple con la propiedad

$$D(\alpha)D(\beta) = D(\alpha + \beta) e^{i\text{Im}\{\alpha\beta^*\}},$$

podemos ahora expresar la Ec. (11) como

$$\rho(t) = |\eta + i\delta\rangle\langle\eta + i\delta|,$$

donde

$$\eta = \alpha e^{-kt/2}, \quad \delta = \frac{\epsilon}{k}(1 - e^{-kt/2}).$$

Notamos que a pesar de las pérdidas y la interacción, el estado que describe al sistema sigue siendo un estado coherente, como muestra la Ec. (14). Esto es, el estado electromagnético definido por la Ec. (14) sigue siendo un estado "puro", o sea, un estado que se puede representar por una función de onda. Generalmente las ecuaciones maestras dan origen a estados "impuros", los cuales no se pueden representar por una función de onda, sino por una suma estadística de matrices de densidad. Esto hubiera ocurrido en nuestro caso si en lugar de un estado coherente como estado inicial hubiéramos tenido otro estado [estado comprimido (o *squeezed state*) [11], estado de número (o de Fock), etc.].

### 2.3. Función $Q$

Para saber cómo evoluciona el sistema en espacio fase podemos calcular alguna función de cuasiprobabilidad [12]. La información que podemos obtener de las funciones de cuasiprobabilidad es muy variada: nos dan información sobre incertidumbres de las variables canónicas (posición y momento, fase e intensidad, etc.), integrando sobre todo el espacio fase podemos encontrar los valores esperados de los momentos de los operadores de creación y aniquilación, etc. De todas las funciones de cuasiprobabilidad, la más fácil de calcular es la función  $Q$ , la cual se encuentra simplemente como un valor esperado (usando un estado coherente  $|\beta\rangle$ ) de la matriz de densidad. Por lo tanto, usando la Ec. (14), encontramos la función  $Q$  como

$$Q(\beta; t) = \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \eta + i\delta \rangle|^2, \quad (16)$$

o finalmente haciendo  $\gamma = \eta + i\delta$ ,

$$Q(\beta; t) = \frac{1}{\pi} e^{-|\beta - \gamma|^2} = \frac{1}{\pi} e^{-(X - \eta)^2} e^{-(Y - \delta)^2}, \quad (17)$$

con  $|\beta\rangle = |\text{Re}(\beta) + i\text{Im}(\beta)\rangle \equiv |X + iY\rangle$ ; siendo  $\alpha$  un número real.

## 3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En las Figs. 2–4 podemos observar el comportamiento dinámico del sistema en el espacio fase. En ellas, graficamos la función  $Q$  para diferentes tiempos. La Fig. 2, para  $t = 0$  y el estado coherente inicial, con  $\alpha = 5$ . La Fig. 3 para  $t = 5$ , donde observamos que se sigue teniendo un estado coherente [ver Ec. (14)], sólo que ahora con diferente amplitud, en este caso más intenso, debido a los parámetros  $\epsilon$ ,  $k$  y  $t$ . Asimismo, vemos que la forma completamente circular de la distribución nos indica iguales incertidumbres para campo eléctrico y campo magnético, como debe ocurrir para un estado coherente. Para  $t = 20$  (Fig. 4) se alcanza el estado de equilibrio y tenemos otra vez un estado coherente, con

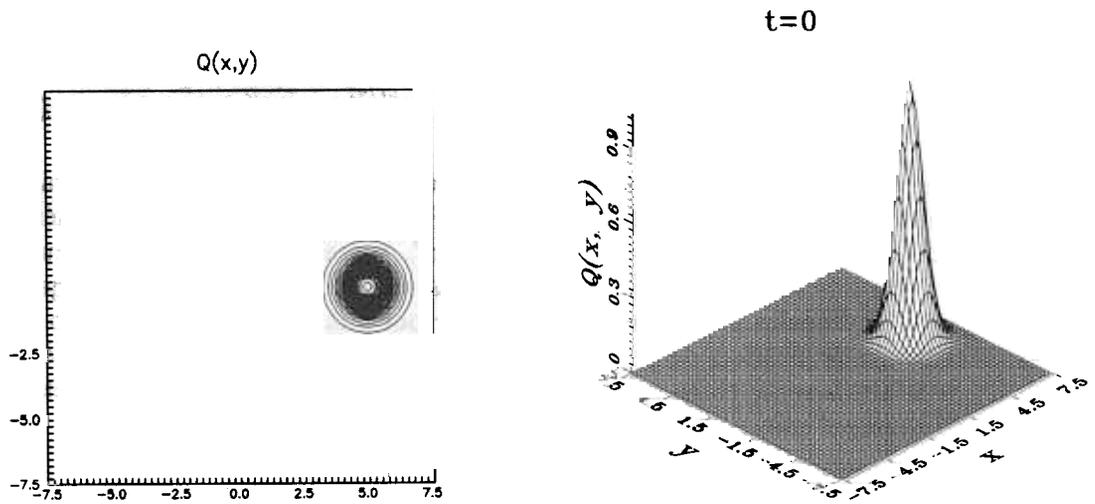


FIGURA 2. Gráfica de la función  $Q$  para  $t = 0$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $k = 0.1$ .

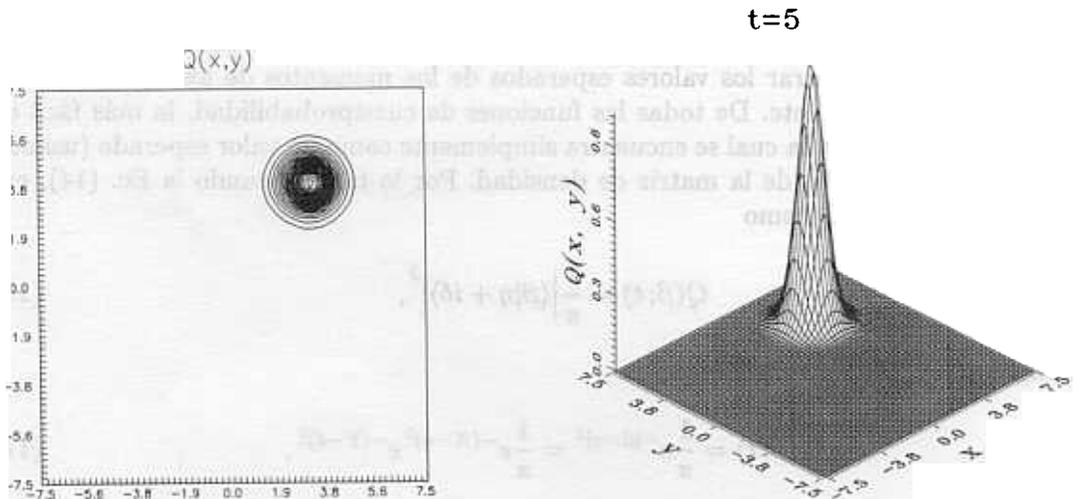


FIGURA 3. Gráfica de la función  $Q$  para  $t = 5$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $k = 0.1$ .

amplitud  $\epsilon/k = 1/0.1 = 10$  y observamos, por consiguiente, la distribución centrada en  $X = 0.1$  y  $Y = 8.6$ .

En conclusión, en este artículo, hemos estudiado la interacción de un campo descrito clásicamente (campo inyectado) con un campo cuantizado dentro de una cavidad no ideal (con pérdidas) usando un método diferente (el método de superoperadores) al comúnmente usado (transformar la ecuación maestra en una ecuación tipo Fokker-Planck). En el estudio, hemos visto que si inicialmente tenemos un campo descrito por una estadística coherente, esta estadística se mantiene invariante ante pérdidas y la interacción con el campo clásico.

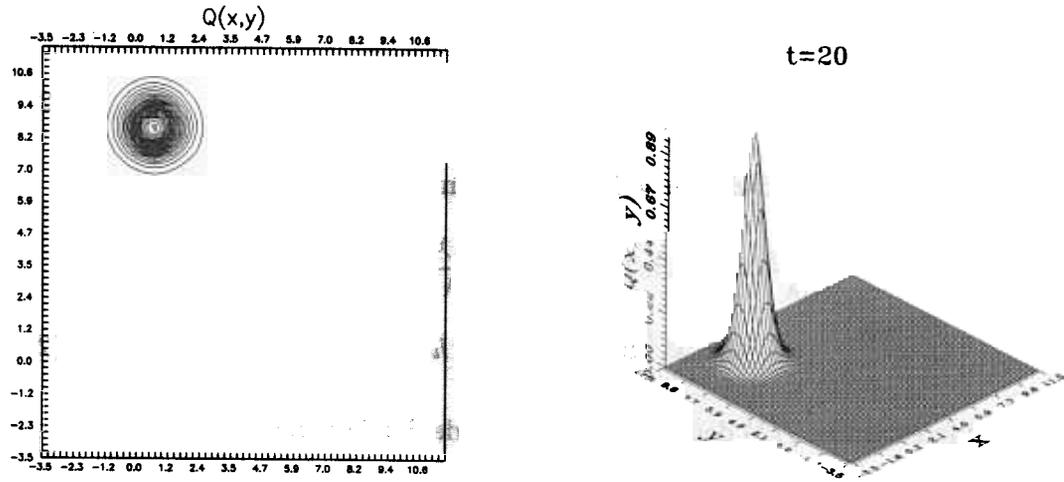


FIGURA 4. Gráfica de la función  $Q$  para  $t = 20$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $k = 0.1$ .

#### APÉNDICE

En este apéndice demostramos el siguiente teorema [8]:

TEOREMA 1. Si  $A$  y  $B$  son operadores que obedecen la regla de conmutación  $[A, B] = kA$ , entonces

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\frac{\hat{A}}{k}(1-e^{-k})} e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}} e^{\frac{\hat{A}}{k}(e^k-1)}.$$

Para probar el Teorema 1 consideramos la función siguiente

$$f(\lambda) = e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})},$$

y suponemos que  $f(\lambda)$  también puede ser expresada como

$$f(\lambda) = e^{g(\lambda)\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}}, \quad (19)$$

$$= e^{\lambda\hat{B}} e^{h(\lambda)\hat{A}}. \quad (20)$$

Diferenciando  $f(\lambda)$  dada por la Ec. (19) con respecto de  $\lambda$ :

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} \hat{A} e^{g(\lambda)\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} + e^{g(\lambda)\hat{A}} \hat{B} e^{\lambda\hat{B}}.$$

Usando la relación [13]

$$e^{\zeta\hat{B}} \hat{A} e^{-\zeta\hat{B}} = \hat{A} + \zeta [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{\zeta^2}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots,$$

obtenemos

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \left( \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} \hat{A} + g(\lambda)k\hat{A} + \hat{B} \right) f(\lambda).$$

Si ahora diferenciamos  $f(\lambda)$  dada por la Ec. (20) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{df(\lambda)}{d\lambda} &= e^{\lambda\hat{B}} \hat{B} e^{h(\lambda)\hat{A}} + e^{\lambda\hat{B}} \frac{dh(\lambda)}{d\lambda} \hat{A} e^{h(\lambda)\hat{A}}, \\ &= f(\lambda) \left( \hat{B} + \frac{dh(\lambda)}{d\lambda} \hat{A} - h(\lambda)k\hat{A} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Por último, diferenciamos  $f(\lambda)$  dada por la Ec. (18), de donde obtenemos

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = (\hat{A} + \hat{B})f(\lambda).$$

Como las Ecs. (21) y (22) deben coincidir con la Ec. (23) tenemos por lo tanto que las igualdades siguientes deben de cumplirse:

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} + g(\lambda)k = 1, \quad (24)$$

y

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} - h(\lambda)k = 1.$$

Resolviendo las Ecs. (24) y (25) con las condiciones iniciales  $g(0) = h(0) = 0$  (es decir,  $f(0) = 1$ ) obtenemos

$$g(\lambda) = \frac{1}{k}(1 - e^{-k\lambda}), \quad h(\lambda) = \frac{1}{k}(e^{k\lambda} - 1).$$

Igualando las Ecs. (18)-(20) obtenemos finalmente,

$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\frac{\hat{A}}{k}(1-e^{-k\lambda})} e^{\lambda\hat{B}} = e^{\lambda\hat{B}} e^{\frac{\hat{A}}{k}(e^{k\lambda}-1)}.$$

Para  $\lambda = 1$  el teorema queda demostrado.

#### REFERENCIAS

1. D. Meschede, H. Walther y G. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 551.
2. P. Meystre, M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag (1991); D.F. Walls, G.J. Milburn; *Quantum Optics*, Springer-Verlag (1994).
3. B.M. Garraway, B. Sherman, H. Moya-Cessa, P.L. Knight y G. Kurizki, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 535; H. Moya-Cessa, P.L. Knight y A. Rosenhouse-Dantsker, *Phys. Rev. A* **50** (1994) 1814.
4. E.T. Jaynes y F.W. Cummings, *Proc. IEEE* **51** (1963) 81.

5. W.B. Shore y P.L. Knight, *J. Mod. Optics* **40** (1993) 1195.
6. V. Buzek, H. Moya-Cessa, P.L. Knight y S.J.D. Phoenix, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 8190.
7. P. Filipowicz, J. Javanainen y P. Meystre, *J. Opt. Soc. Am. B* **3** (1986) 906.
8. S.M. Barnett, Ph. D. thesis, University of London (1985).
9. S.J.D. Phoenix, *Phys. Rev. A* **41** (1990) 5132.
10. R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
11. R. Loudon y P.L. Knight, *J. Mod. Optics* **34** (1987) 709.
12. M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O. Scully y E.P. Wigner, *Phys. Rep.* **106** (1984) 121; H. Moya-Cessa y P.L. Knight, *Phys. Rev. A* **48** (1993) 2479.
13. H. Louissel, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley Interscience (1990).
14. K. Vogel, H. Risken, *Phys. Rev. A* **39** (1989) 4675.

coisabM A  
 0001 eb orcedab ab A

1001  
 0001 eb orcedab ab A

teb e  
 teb e  
 eb e

Write the notes to your own notebook. We proceed as follows:  
 1. We consider a harmonic oscillator and we take as the cycle's time  $T$   
 2. To the isobaric heating and the isochoric cooling processes. The results are  
 3. and the compression ratio of the cycle are in accordance with typical  
 4. Our results improve those reported by H. S. but for the same cycle.

los libros de termodinámica clásica se encuentran en los  
 algunos libros. Como es bien sabido, los modelos reversibles  
 mecánicos conducen a valores sobreestimados para variables de  
 la entalpa y la eficiencia. Naturalmente, esto se debe a que no  
 se consideran ciertos fenómenos, ni fenómenos de transporte  
 De hecho, los modelos reversibles, necesariamente cuasistáticos  
 a decir, el trabajo por unidad de tiempo tiende a ser cero, debido  
 proceso estáticamente reversible se tendría que emplear un tiempo  
 Este modo, se puede afirmar que los modelos de procesos  
 dinámica clásica de equilibrio (TCE) son útiles en el sentido  
 (o mínimas) de operación para ciertos variables de proceso  
 tratada por el teorema de Goursat, que establece que no

teb e  
 eb e  
 eb e