20

METODO DE GILBERT-BACKUS

7.3. SOLUTION IN TERMS OF KERNELS

From M measurements $\int K_1(x)\, f(x)\, dx$, $\int K_2(x)\, f(x)\, dx$, ..., $\int K_M(x)\, f(x)\, dx$ one can evidently only obtain information on the projection of $f(x)$ on to the function subspace spanned by the kernels $K_1(x), K_2(x), \ldots, K_M(x)$. In other words, the most general solution which can be legitimately obtained is:

$$f(x) = \xi_1 K_1(x) + \xi_2 K_2(x) + \ldots + \xi_M K_M(x) + \psi(x)$$

where $\psi(x)$ is any (arbitrarily large) function orthogonal to the set of functions $K_1(x), K_2(x), \ldots, K_M(x)$. Making this substitution into the fundamental integral equation one gets:

$$g_i = \int \sum_j K_i(x)\, K_j(x)\, \xi_j dx$$

or $\mathbf{g} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}$

$\mathbf{C}$ being the covariance matrix $\|\int K_i(x)\, K_j(x)\, dx\|$. We have already seen that $\mathbf{C}$ is highly ill-conditioned (possesses very small eigenvalues) and the above equation is no more amenable to direct inversion than those encountered earlier. However, it does have the advantage that components orthogonal to the kernels are explicity excluded from the solution, whereas in other methods they may tend to creep in. However, further smoothing of the solution by some means is still necessary in most instances and this is now less easy since explicit reference is no longer made to $f(x)$ or $\mathbf{f}$ in the equation $\mathbf{g} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}$.

GILBERT - BACKUS

$$g(y) = \int_a^b K(x, y)\, f(x)\, dx$$

TRIVIALIDAD EN TERMINOS DE ORDENADAS DISCRETAS

$$g(y_J) = \int_a^b K(x, y_J)\, f(x)\, dx$$

INVIRTIENDO FORMALMENTE

$$f(x_K) = \sum_J H_{KJ}\, g(y_J)$$

H_{KJ} OPERADOR INVERSO

FORMALMENTE, SERÀ PUES

$$f(x_K) = \sum_J H_{KJ} \int_a^b K(x, y_J)\, f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \left[\sum_J H_{KJ}\, K(x, y_J) \right] f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \left[\sum_J H_{KJ}\, K(x, y_J) \right] = \delta(x ; x_K)$$

ESTA TRIVIALIDAD FORMAL SUGIERE LA IDEA

SI ES POSIBLE ENCONTRAR COMBINACIONES LINEALES DE LOS DATOS $g(y_j)$, CON COEFICIENTES $W(y_j)$, TALES QUE

$$S(x) = \sum_j W(y_j) \cdot K(x, y_j)$$

SEA UNA FUNCION DE X, LO MÁS ESTRECHA POSIBLE ALREDEDOR DE ALGÚN VALOR X_k DE X PRESCRITO.:

LA FUNCION $S(x)$ SERÁ, EN PRINCIPIO, DIFERENTE PARA CADA VALOR X_k PRESCRITO.

SI, ALREDEDOR DE UN X_K PRESCRITO

ENCONTRAMOS UNA FUNCION

$$S^k(x) = \sum_j W^k(y_i)\, K(x, y_j)$$

los pesos dependerán de x_k

MUY ESTRECHA, ALREDEDOR DE X^k:

$$S^k(x) \sim \delta(x - x_k)$$

EN

$$g(y) = \int_a^b K(x, y)\, f(x)\, dx$$

HACIENDO

$$\sum_j W(y_j)\, g(y_j) =$$

$$= \int_a^b \underbrace{\sum_j K(x, y_j)\, W(y_i)}\, f(x)\, dx$$

$$\simeq \int_a^b \delta(x - x_k)\, f(x)\, dx = f(x_k)$$

HACIENDOLO PARA TODO X_K

SE RESUELVE EL PROBLEMA

PROBLEMA :

DADO X_K

ENCONTRAR EL CONJUNTO DE COEFICIENTES $W^K(y_J)$ ASOCIADOS, TAL QUE

$$S^K(x) = \sum_J W^K(y_J)\, K(x, y_J)$$

SEA UNA FUNCIÓN DE X MUY ESTRECHA, ALREDEDOR DE X_K

PARA MEDIR LA ANCHURA DE $S^K(x)$ GILBERT + BACKUS PROPONEN LA FUNCIONAL

$$\int_a^b (X - X_K)^2 \; S^K(x)^2 \, dx$$

YA QUE (SALVO PARA FUNCIONES $S^K(x)$ CATASTROFICAS), CUANTO MENOR SEA LA ANCHURA DE $S^K(x)$, MENOR SERA LA INTEGRAL

EN LA INTEGRAL ANTERIOR

$$\int_a^b (x - x_k)^2 \; S^k(x)^2 \, dx$$

QUE TENEMOS QUE MINIMIZAR

$$S^k(x)^2 = \sum_J W^k(y_J) \sum_L W^k(y_L) \, K(x, y_J) \, K(x, y_L)$$

LLAMANDO LA MATRIZ

$$N^k = \{ N^k_{JL} \}$$

$$N^k_{JL} = \int_a^b (x - x_k)^2 \, K(x, y_J) K(x, y_L) \, dx$$

TIENE QUE SER

$$\sum_J \sum_L W^k(y_J) \, W(y_L) \, N^k_{JL}$$

MINIMO

LO QUE NOS PROPORCIONARÁ LOS COEFICIENTES $W^k(y_J)$

MINIMIZAR LA FUNCIONAL

$$F = \overline{W}^{k*} \, \underline{\underline{N}}^k \, \overline{W}^k$$

$$\sum_L N^K(L,J)^* W_J^K + \sum_L W_J^K N^K(J,L) = 0$$

$$2 \sum_L N^K(L,J)\, W_J^K = 0$$

SISTEMA HOMOGENEO
INFINITAS SOLUCIONES.

NORMALIZACIÓN DE $S(x)$

$$\int_a^b S(x)\, dx = 1$$

O SEA

$$\sum_J W^K(y_J) \int_a^b K(x, y_J)\, dx = 1$$

NOTACION

$$\mathcal{X}(y_J) = \int_a^b K(x, y_J)\, dx$$

SON CONOCIDAS
A PARTIR DEL NUCLEO

LIGADURA

$$\sum_J W^K(y_J)\, \mathcal{X}(y_J) = 1$$

$$\overline{W}^* \cdot \overline{\mathcal{X}} = 1$$

MINIMIZAR LA FUNCIONAL

$$F = \overline{W}^{*k} \underline{N}^{k} \overline{W}^{k} + \beta \overline{W}^{*k} \cdot \overline{x}$$

$$2 \underline{\underline{N}}^{k} \overline{W}^{k} + \beta \overline{x} = 0$$

β ES UN MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

$$\overline{W}^{k} = -\frac{\beta}{2} \underline{\underline{N}}^{k^{-1}} \cdot \overline{x}$$

PROPORCIONA LOS COEFICIENTES

$W^{k}(y_J)$ PARA EL VALOR DADO X_k

COMO

$$S(x) = \sum_J W^{k}(y_J) \cdot K(x, y_J)$$

TIENE QUE SER DE AREA UNIDAD

ES DECIR $\sum_J W^{k}(y_J) \, \mathcal{X}(y_J) = 1$

SE DETERMINA β CON LO CUAL

$$\overline{W}^{k} = \frac{\underline{\underline{N}}^{k^{-1}} \overline{x}}{\overline{x}^{*} \underline{\underline{N}}^{k^{-1}} \overline{x}}$$

LUEGO PARA CADA X_k

ENCONTRAMOS EL CONJUNTO DE COEFICIENTES $W^k(y_j)$

QUE NOS PROPORCIONAN

$$S^k(x) = \sum_j W^k(y_j)\, K(x, y_j)$$

QUE ES UNA FUNCION, ESTRECHA ALREDEDOR DE X_k Y NORMALIZADA

DE ESTA FORMA

$$\sum_j W^k(y_j)\, g(y_j) = \int_c^d S^k(x)\, f(x)\, dx$$

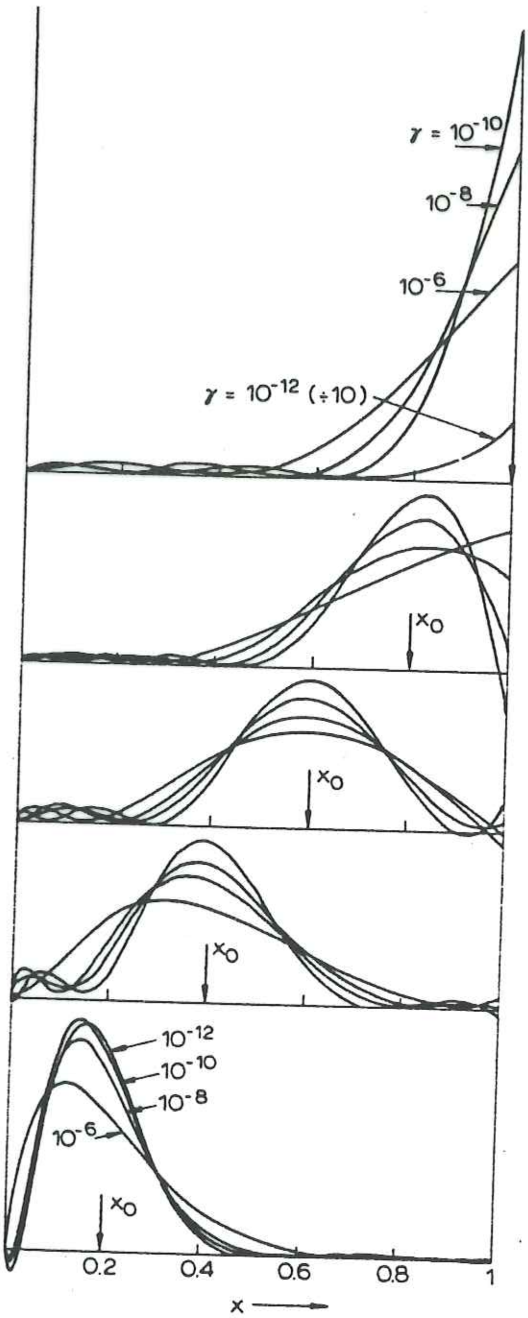
$$\simeq f(x_k)$$

NOS PERMITE ESTIMAR EL VALOR DE $f(x_k)$

PERO PARA CADA X_k HAY QUE INVERTIR LA MATRIZ

$$N_{jl} = \int_c^d (x - x_k)^2\, K(x, y_j)\, K(x, y_l)\, dx$$

$K(x,y) = x\, e^{-xy}$ $\mathcal{U}\ (0 \le x \le 1)$



Scanning functions synthesized from the kernel functions $x\ e^{-yx}$ by means of

Arrows indicate x_0, the central value (about which

spread of the scanning functions was minimized).

It is apparent therefore that the Backus–Gilbert method offers little advantage over other inversion techniques when *applied to the construction of approximate numerical solutions*. Indeed it is rather laborious and expensive to apply in practice because the inversion equation (6.45) must be recomputed for each source function value y_0 (see e.g. Twomey (1977) p 184 for discussion of efficiency). Its real value seems to reside in the following: that it is capable of quantifying the resolving power of the observations; of assessing the significance of features in a given source function model; and of theoretically determining the intrinsic information content of one data set as opposed to another. For these reasons, the Backus–Gilbert method is probably better suited to experimental design than to construction of approximate pointwise source function models.

EN CIERTO MODO INDICA QUE PROPORCION DE CADA $g(y)$ PROVIENE DE UNA $f(x_k)$ DETERMINADA

$W^k(y_j)$ PROPORCION DE

$g(y_j)$ QUE PROVIENE DE $f(x_k)$

SUMANDO SOBRE TODAS LAS $g(y_j)$ AFECTADAS POR ESTA PROPORCIÓN, TENDREMOS

$f(x_k)$

ALGO COMO ESTO HACEN TAMBIÉN LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS (LUCY)

EL MÉTODO DE GILBERT-BACKUS

ES, EN REALIDAD, UN MÉTODO DE INVERSION APROXIMADA QUE PUEDE JUSTIFICARSE TEORICAMENTE

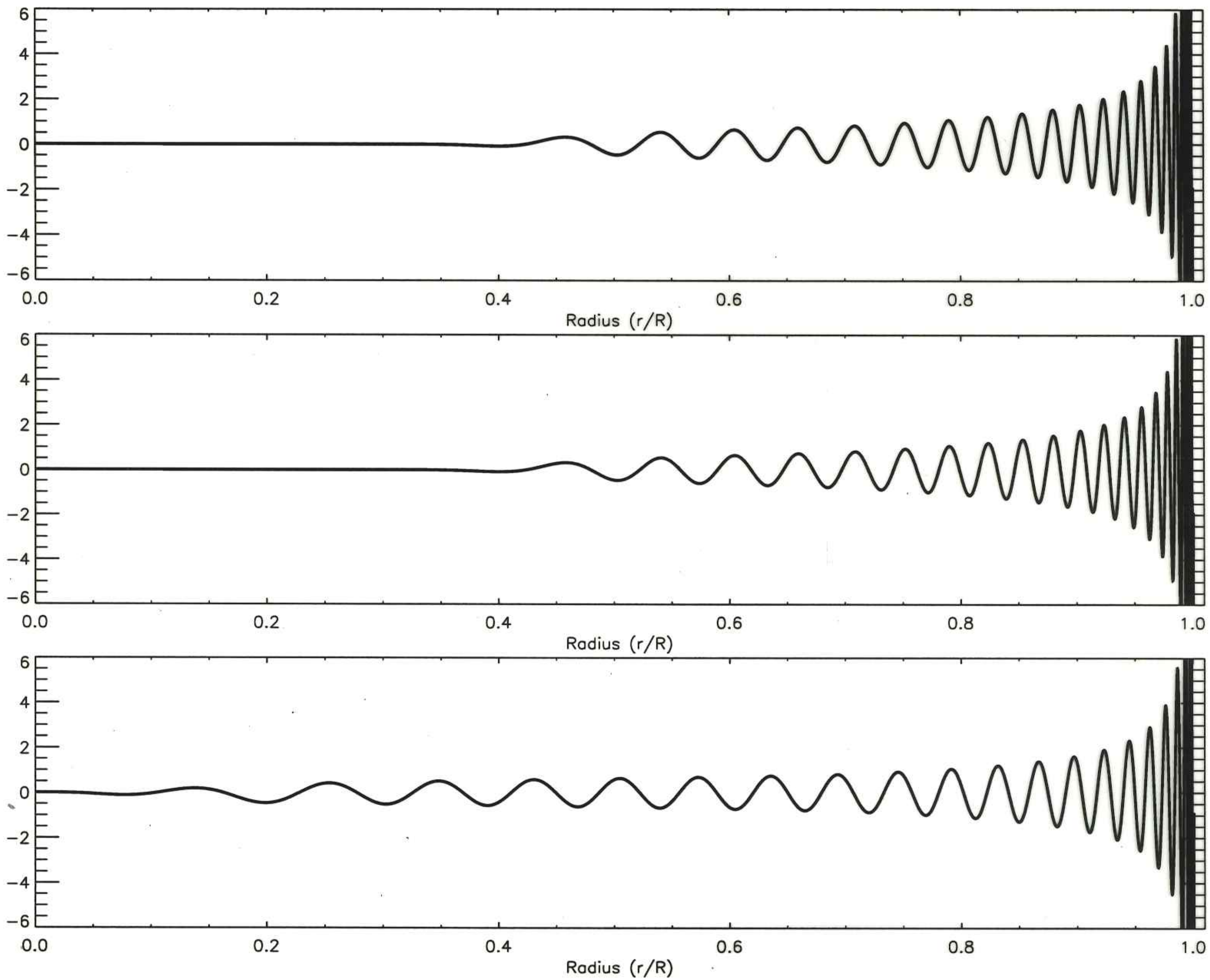
DESAFORTUNADAMENTE NO SE PUEDE OBTENER UNA APROXIMACION TAN GRANDE COMO SE QUIERA

TAMPCO PARECE SER NECESARIO VISTO LO VISTO EN ESTE TIPO DE PROBLEMAS

PERO ES DIFICILMENTE VIABLE

SUELE SER UTILIZADO CUANDO NO SE TIENE NINGUNA IDEA DEL COMPORTAMIENTO DE $f(x)$

O CUANDO NO SE TIENE NINGUNA IDEA SOBRE LA CALIDAD DE UNA SOLUCIÒN OBTENIDA CON OTRO MÉTODO.


6
4
2
0
−2
−4
−6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Radius (r/R)
6
4
2
0
−2
−4
−6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Radius (r/R)
6
4
2
0
−2
−4
−6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Radius (r/R)

GONG(l<3)+MDI144(l>=3) MOLA (corrected sectoral splittings) + RLS