19

TECNICAS ITERATIVAS

19- 1

PERTURBACIONES

$$g(y) = \int_a^b K(x, y)\, f(x)\, dx$$

SUPONGAMOS QUE DE ALGUNA MANERA – MAS O MENOS JUSTIFICADA – SABEMOS HACER UNA <u>INVERSIÓN APROXIMADA</u>

ES DECIR, PARA CUALQUIER $g(y)$ DADO, SABEMOS ENCONTRAR UNA $f_A(x)$ QUE SATISFACE APROXIMADAMENTE LA TRANSFORMADA INTEGRAL ANTERIOR.

EJEMPLOS:

T. LAPLACE $\qquad g(y) = \int_0^\infty e^{-xy} f(x)\, dx$

$$f_A(x) = \left[y \cdot g(y)\right]_{y = \frac{1}{x}}$$

CONVOLUCIÓN $\qquad g(y) = \int_c^b K(x-y)\, f(x)\, dx$

Aproximación NUCLEO ESTRECHO

$$K(x-y) \to \delta(x-y)$$

$$f_A(x) = g(y=x)$$

A LA TRANSFORMADA INTEGRAL APROXIMADA QUE, PARA ESA $g(y)$ DADA, SATISFACE LA $f_A(x)$ "APROXIMADA" LA DENOTAREMOS COMO

$$g(y) = \int_a^b K_A(x,y)\, f(x)\, dx$$

ES DECIR $f_A(x)$ SATISFACE LA TRANSFORMADA INTEGRAL ANTERIOR PARA LA $g(y)$ DADA ANTERIOR.

PUEDE OCURRIR QUE SEPAMOS ENCONTRAR LA SOLUCIÓN APROXIMADA $f_A(x)$ SIN SABER ESCRIBIR EL NUCLEO APROXIMADO $K_A(x,y)$

ES EL CASO DE LA SOLUCIÓN APROXIMADA PARA LA ANTERIOR

EN OTROS TERMINOS, LA TRANSFORMADA INTEGRAL ANTERIOR "APROXIMADA" —QUE, A VECES, NO SABREMOS ESCRIBIR— REPRESENTA EL PROCESO DE OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN APROXIMADA $f_A(x)$

PARA UNA $g(y)$ DADA

PARTIREMOS DE UNA "SOLUCIÓN APROXIMADA" $f_0(x)$

A PARTIR DE ELLA ENCONTRAREMOS UNA CORRECCIÓN LO QUE NOS PERMITIRÁ ENCONTRAR LA "SOLUCIÓN APROXIMA CORREGIDA" $f_1(x)$

A PARTIR DE ESTA ULTIMA ENCONTRAREMOS OTRA CORRECCIÓN LO QUE NOS PERMITIRA ENCONTRAR LA "SOLUCIÓN APROXIMADA CORREGIDA" SIGUIENTE $f_2(x)$

Y ASI SUCESIVAMENTE

CORRECCIÓN VÍA TEORÍA DE PERTURBACIONES

A PARTIR DE UNA SOLUCIÓN APROXIMADA DE ORDEN N:

$f_N(x)$ CONOCIDA

ESCRIBIREMOS

$$g(y) = \int K_A(x,y)\, f_{N+1}(x)\, dx + \int \left[K(x,y) - K_A(x,y) \right] f_N(x)\, dx$$

$f_N(x)$ NOS PERMITIRÁ CALCULAR

$$\Delta g_n(y) \equiv \int \left[K(x,y) - K_A(x,y) \right] f_N(x)\, dx$$

DIFERENCIA ENTRE

$$g_n(y) \equiv \int K(x,y)\, f_N(x)\, dx$$

INTEGRAL, SÍNTESIS, CON EL NÚCLEO EXACTO. ES UNA OPERACIÓN DETERMINISTA

EN PRINCIPIO LA INTEGRAL

$$\int K_A(x,y)\, f_N(x)\, dx$$

NO SABEMOS HACERLA DIRECTAMENTE.

NO TENEMOS POR QUE CONOCER EXPLICITAMENTE EL NUCLEO APROXIMADO $K_A(X,Y)$

(ADMITAMOS QUE CONOCEMOS ESA INTEGRAL, Y POR LO TANTO LA DIFERENCIA $\Delta g_n(y)$)

ENTONCES SERA:

$$g(y) - \Delta g_n(y) = \int K_A(X,Y) f_{n+1}(x)\, dx$$

DE DONDE SE OBTIENE LA NUEVA APROXIMACIÓN $f_{n+1}(x)$

PUES BIEN, LA INTEGRAL QUE NOS FALTABA, SERÍA

$$\int K_A(X,Y) f_n(x)\, dx = g(y) - \Delta g_{n-1}(y)$$

ES DECIR ES EL DATO DE LA ITERACIÓN ANTERIOR.

PROCESO

PARTIMOS DE UNA **SOLUCIÓN** APROXIMADA INICIAL $f_0(x)$

· SOLUCIÓN DE

$$g(y) = \int K_A(x,y)\, f_0(x)\, dx$$

SÍNTESIS CON EL NÚCLEO CORRECTO

$$g_0(y) = \int K(x,y)\, f_0(x)\, dx$$

LUEGO

$$\Delta g_0(y) = g_0(y) - g(y)$$

ESTA CORRECCIÓN NOS PERMITE ESCRIBIR

$$g(y) - \Delta g_0(y) = 2g(y) - g_0(y) =$$

$$= \int K_A(x,y)\, f_1(x)\, dx$$

SE TRATA DE LA TRANSFORMADA "FÁCIL DE INVERTIR" LUEGO

OBTENEMOS FÁCILMENTE $f_1(x)$

SINTESIS CON EL NUCLEO CORRECTO

$$g_1(y) = \int K(x, y)\, f_1(x)\, dx$$

LUEGO

$$\Delta g_1(y) = g_1(y) - [2g(y) - g_0(y)]$$

$$= (g_0(y) + g_1(y)) - 2g(y)$$

ESTA CORRECCIÓN NOS PERMITE ESCRIBIR

$$g(y) - \Delta g_1(y) = 3g(y) - (g_0(y) + g_1(y)) =$$

$$= \int K_A(x, y)\, f_2(x)\, dx$$

SE TRATA DE LA TRANSFORMADA "FACIL DE INVERTIR" LUEGO

OBTENEMOS FACILMENTE $f_2(x)$

Y ASI SUCESIVAMENTE

SE TRATA DE UN MÉTODO QUE

PARTIENDO DE QUE SABEMOS INVERTIR EL OPERADOR

$$\int K_A(x,y)\ldots dx$$

[AUNQUE EN PRINCIPIO NO LO PODAMOS ESCRIBIR COMO OPERADOR, PERO SABEMOS ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN A LA TRANSFORMADA INTEGRAL DEFINIDA POR ÉL, PARA CUALQUIER DATO $g(y)$]

VA MODIFICANDO LOS DATOS $g(y)$ A OTROS NUEVOS $\bar{g}(y)$ TAL QUE LA SOLUCIÓN DE LA TRANSFORMADA FACIL DE INVERTIR CON ESTOS DATOS

$$\bar{g}(y)=\int K_A(x,y)f(x)\,dx$$

SEA LA MISMA QUE LA DE LA TRANSFORMADA ORIGINAL CON LOS DATOS CORRECTOS

$$g(y)=\int K(x,y)f(x)\,dx$$

A VECES LA SOLUCIÓN APROXIMADA SE ENCUENTRA RESOLVIENDO A PARTIR DE UN NUCLEO SIMPLE, PROXIMO DEL NUCLEO CORRECTO:

METODO DEL NUCLEO SINTÉTICO

ENTONCES SÍ QUE SE CONOCE

$$K_A(x, y)$$

NO OBSTANTE, MUCHAS VECES SE PUEDE (COMO VIMOS) ESCRIBIR UNA SOLUCIÓN APROXIMADA, SIN CONOCER (NI FALTA QUE HACE) EL NUCLEO APROXIMADO CORRESPONDIENTE.

The initial corrections are indeed relatively small, if we start with a sufficiently smooth function f, but later they increase rapidly, showing more and more rapid oscillations, this growth being due to the presence of noise in the right member of $Kf = g$. Therefore in the application of iteration algorithms the research worker must himself decide when to break off the iteration process, being guided by some sort of ideas about the genuine or noise origin of the details of the solution that appear after each new iteration.

EN PRINCIPIO LOS METODOS ITERATIVOS LLEGARÁN (SI LLEGAN) A LA SOLUCIÓN POR OTRO CAMINO

PERO NO PUEDEN OBVIAR NINGÚN PROBLEMA NI DIFICULTAD INTRÍNSECA AL PROBLEMA.

PERTURBACIONES

INTERPRETACIÓN EN TÉRMINOS DE ÁLGEBRA LINEAL

TECNICAS ITERATIVAS

QUEREMOS RESOLVER

$$\underline{\underline{K}}\,\bar{f} = \bar{g} \quad \text{O MEJOR} \quad \tilde{\underline{\underline{K}}}\,\underline{\underline{K}}\,\bar{f} = \tilde{\underline{\underline{K}}}\,\bar{g}$$

OPERATIVAMENTE

$$\bar{f} = \underline{\underline{K}}^{-1}\,\bar{g}$$

PERO, OPERATIVAMENTE TAMBIÉN

$$\underline{\underline{K}}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})^n \leftarrow \frac{1}{\underline{\underline{K}}} = \frac{1}{\underline{\underline{I}} - (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})}$$

LUEGO

$$\bar{f} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})^n\right]\bar{g}$$

$$\bar{f} = \bar{g} + (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})\,\bar{g} + (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})\,\bar{g} + \cdots$$

O EN LA FORMA

$$\bar{f}_0 \equiv \bar{g}$$

$$\bar{f}_1 = \bar{g} + (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})\,\bar{f}_0$$

$$\bar{f}_2 = \bar{g} + (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})\,\bar{f}_1$$

$$\bar{f}_3 = \bar{g} + (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}})\,\bar{f}_2$$

INVERSION TRIVIAL

INVERSION TRIVIAL

EN MUCHAS CONVOLUCIONES

$$K(x, y) = K(|x-y|)$$

LA FUNCIÓN IMAGEN $g(y)$ ES RELATIVAMENTE SEMEJANTE A LA FUNCIÒN OBJETO $f(x)$: REPITE "A GROSSO MODO" SU FORMA

SON ISOMORFAS EN EL SENTIDO LÍTERAL (GRIEGO) DE LA PALABRA

PARTIMOS DE $f_\Delta(x)$

SINTESIS $f_\Delta(x) \longrightarrow g_\Delta(y)$

PROPONEMOS

$$\overset{\text{NUEVA}}{f(x)} = \frac{f_\Delta(x)}{g_\Delta(y=x)}\, g(y=x)$$

ITERAR

PUEDE SER TAN RAPIDO COMO EL METODO ANTERIOR

AUNQUE TENGA SOLO UNA JUSTIFICACIÓN ESTETICA

Y NO RAZONAMIENTOS PROBABILISTICOS

19-2

INVERSION BAYESIANA

(TECNICAS PROBABILISTICAS)

NUCLEO $K(x,y) \equiv K(x \to y)$

PROBABILIDAD DE QUE EL VALOR DE LA FUNCION IMPUT $f(x)$ PARA UN INTERVALO COMPRENDIDO ENTRE x Y $x+dx$. PROPORCIONE VALORES PARCIALES DE LA FUNCION OUTPUT $g(y)$ COMPRENDIDOS ENTRE y Y $y+dy$

EN ESTE INTERVALO $y, y+dy$ EN $g(y)$ COLABORAN TAMBIÉN LOS VALORES DE $f(x)$ CORRESPONDIENTES A OTROS INTERVALOS DE X FUERA DEL ANTERIOR (RAZON DE PARCIAL)

LA PROBABILIDAD PARA ESE VALOR PARCIAL DE $g(y)$ ES PUES

$$K(x,y)\, f(x)\, dx$$

EL VALOR TOTAL DE SERÁ

$$g(y) = \int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx$$

INTERPRETACIÓN ESTADISTICA DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL

$$g(y) = \int_a^b k(x, y)\, f(x)\, dx$$

PARA UN x_k DADO $k(x_k, y)$

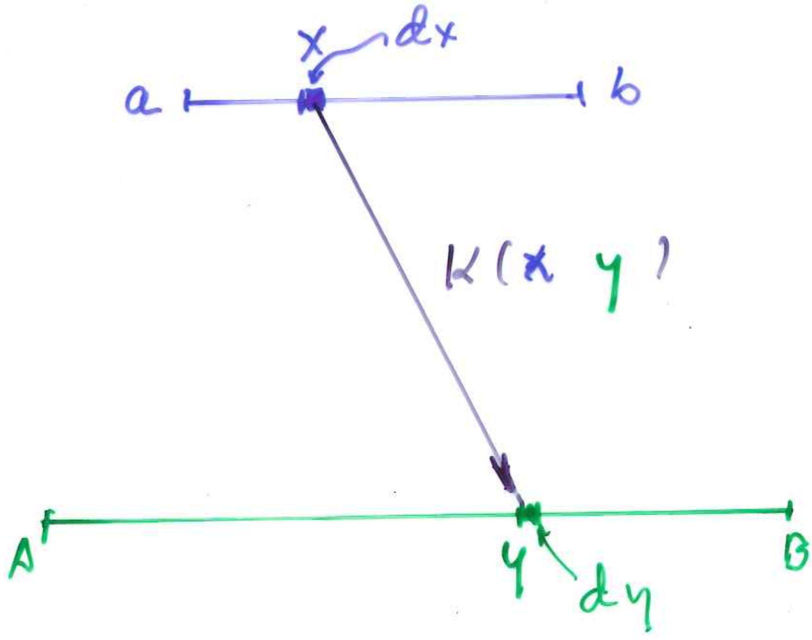
SE PUEDE INTERPRETAR COMO LA PROBABILIDAD QUE TIENE $f(x)$ DE INTERVENIR EN LA INTEGRAL CON ESE VALOR x_k DE x PARA PROPORCIONAR CADA UNO DE LOS VALORES DE $g(y)$

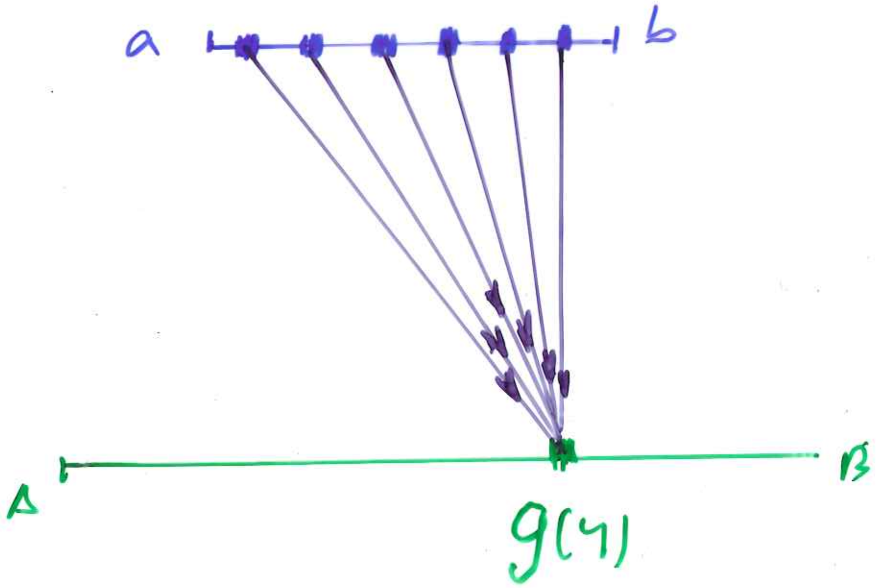
$$f(x)\, dx\; k(x, y)\, dy$$

NUMERO TOTAL DE PROCESOS CON ENTRADA ENTRE x Y $x + dx$ Y SALIDA ENTR y Y $y + dy$ QUE COLABORAN A GENERAR

$$g(y)\, dy$$

$$g(y) = \int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx$$





UN ELEMENTO DE LA FUNCION IMPUT $f(x)dx$, CORRESPONDIENTE AL INTERVALO (x, dx) DEL ESPACIO DE IMPUTS <u>COLABORA NECESARIAMENTE</u> A FORMAR TODOS LOS ELEMENTOS $g(y)dy$ CORRESPONDIENTES A TODOS LOS INTERVALOS (y, dy) DEL ESPACIO OUTPUT

NORMALIZACIÓN

$$\int_A^B k(X, Y)\,dy = 1$$

PARA TODO X

SI $k(X, Y)$ NO CUMPLE (EN UN DETERMINADO PROBLEMA) ESA CONDICION

$$k(X, Y) = k_N \cdot k_0(x, Y)$$

SE NORMALIZA CON LA CONSTANTE k_N Y UN NUCLEO OPERATIVO QUE SI LA CUMPLA

IMAGINEMOS EL PROCESO INVERSO

$$K^{-1}(x,y) \equiv K^{-1}(y \rightarrow x)$$

PROBABILIDAD DE QUE EL VALOR DE LA FUNCION (EN EL PROCESO INVERSO) $g(y)$ PARA UN INTERVALO ENTRE y E, $y+dy$ PROPORCIONE VALORES PARCIALES DE $f(x)$ COMPRENDIDOS ENTRE x Y $x+dx$:

$$K^{-1}(x,y)\, g(y)\, dy$$

EL VALOR TOTAL DE SERÁ

$$f(x) = \int_A^B K^{-1}(x,y)\, g(y)\, dy$$

QUE ES LA INTERPRETACIÓN DEL PROCESO INVERSO

¡PERO NO SE CONOCE $K^{-1}(x,y)$!

BAYES (TEOREMA)

$$K(x,y)\,f(x) = K^{-1}(x,y)\,g(y)$$

SIEMPRE Y CUANDO SE TRATE DE UN PROCESO PROBABILISTICO

O CUANDO NO NOS CABE MAS REMEDIO QUE SUPONER QUE LO ES

SEGÚN ESTO

$$K^{-1}(x,y) = K(x,y)\frac{f(x)}{g(y)}$$

$$K^{-1}(x,y) = \frac{f(x)\;K(x,y)}{\int_a^b f(x)\,K(x,y)\,dx}$$

RICHARDSON 1972
LUCY 1974

SI DISPONEMOS DE UNA FUNCION $f(x)$ APROXIMADA:

$$f_A(x)$$

PODEMOS CALCULAR LA CORRESPONDIENTE FUNCIÓN IMAGEN $g_A(y)$

PROCESO DE SINTESIS

NO HAY PROBLEMAS

$$g_A(y) = \int_a^b K(x, y)\, f_A(x)\, dx$$

EL NUCLEO $K(X, Y)$ ES CONOCIDO

PODEMOS TOMAR PARA EL NUCLEO DEL PROCESO INVERSO

NUCLEO APROXIMADO DE UN PROCESO INVERSO IMAGINARIO (PERO MAS VALE ALGO QUE NADA)

$$K^{-1}(x, y) = K(x, y)\, \frac{f_A(x)}{g_A(y)}$$

CON ESTE NUCLEO APROXIMADO PARA EL PROCESO INVERSO PODREMOS CALCULAR UNA NUEVA FUNCION $f(x)$ QUE, ESPERAMOS, SEA MÁS CORRECTA QUE LA FUNCION APROXIMADA DE PARTIDA $f_A(x)$

$$f_A^{iter}(x) = \int_A^B K_A^{-1}(x,y)\, g(y)\, dy$$

$$= f_A(x) \int_A^B K(x,y)\, \frac{g(y)}{g_A(y)}\, dy$$

EL NUCLEO APROXIMADO PARA EL PROCESO INVERSO $K^{-1}(x,y)$ ACTUA SOBRE LA FUNCION IMAGEN (DATOS) CORRECTA $g(y)$

SE PUEDE REPETIR EL PROCESO TANTAS VECES COMO SE QUIERA

SI EN

$$g(y) = \int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx$$

EL NUCLEO $K(x,y)$ NO ESTA NORMALIZADO
ES DECIR SI

$$\int_A^B K(x,y)\, dy = \mathcal{K}(x)$$

ES UNA FUNCIÓN DE X

HAREMOS

$$K(x,y) = K_N(x,y)\, \mathcal{K}(x)$$

Y TRABAJAMOS CON $K_N(x,y)$

Y LA FUNCIÓN INCOGNITA $\mathcal{K}(x) f(x)$

MUCHAS PROPIEDADES POSITIVAS PERO CONVERGE MUY LENTAMENTE