

15

OPERADORES M  
SIMÉTRICOS

1.5.1

FUNCIÓNES PROPIAS  
ESTRICTAS

(de operadores no simétricos)

## OPERADORES NO SIMÉTRICOS

ADMITAMOS (ES DIFÍCIL) QUE SE CONOZCA EL ESPECTRO DE UN OPERADOR NO SIMÉTRICO:

$$\lambda_j, \phi_j(x)$$

LAS FUNCIONES PROPIAS  $\phi_j(x)$  NO SON ORTOGONALES

VEAMOS QUE ERA FÁCIL ORTONORMALIZAR

$$\phi_j(x) \mapsto \phi_j^*(x) = \sum_{e=0}^j C_{je} \phi_e(x)$$

$$\langle \phi_j^*(x), \phi_k^*(x) \rangle = \delta_{jk}$$

## GRAM-SCHMIDT

ENTONCES SE OBTIENEN DIRECTAMENTE LOS COEFICIENTES  $\beta^*$  DE LA FUNCIÓN DATO  $g(\gamma)$

$$\begin{aligned} g(\gamma) &= \sum_{j=0}^N \beta_j^* \phi_j^*(\gamma) = \sum_{j=0}^N \beta_j^* \sum_{e=0}^j C_{je} \phi_e(\gamma) \\ &= \sum_{e=0}^N \phi_e(\gamma) \left( \sum_{j=e}^N \beta_j^* C_{je} \right) = \sum_{e=0}^N \beta_e \phi_e(\gamma) \end{aligned}$$

DONDE SE PUEDE INVERTIR DIRECTAMENTE PARA OBTENER

$$f(x) = \sum_{e=0}^N \frac{\beta_e}{\lambda_e} \phi_e(x)$$

AHORA ES MAS DIFICIL SEGUIR  
LA PISTA AL VALOR DE LOS  
COEFICIENTES  $\beta_e$

CADA UNO DEPENDE DE TODOS  
LOS  $\beta_j^*$  ANTERIORES

PUEDE SER INTERESANTE VER  
COMO SE ESCRIBE EL NUCLEO  
 $K(x, y)$  EN FUNCION DE LAS  
CORRESPONDIENTES FUNCIONES  
RESULTANTES DE ORTOGONALIZAR  
LAS PROPIAS.

SI, POR NO SER EL NUCLEO  
SIMETRICO,

AUNQUE DISPONGAMOS LAS FUNCIONES  
PROPIAS DEL OPERADOR  $\phi_j(x)$   
ESTAS NO SON ORTOGONALES

VEIAMOS QUE ERA FACIL (GRAM-  
SCHMIDT) ENCONTRAR LOS  
COEFICIENTES  $C_{je}$  DE LA RELACION

$$\phi_j^*(x) = \sum_{e=1}^J C_{je} \phi_e(x)$$

QUE PERMITE OBTENER UNAS  
FUNCIONES  $\phi_j^*(x)$  ORTONORMALES

ESTAS NO SERAN ESTRICTAMENTE  
FUNCIONES PROPIAS, PERO NOS  
PERMITEN ESTUDIAR EL NUCLEO  
 $K(x, y)$

COMO ANTERIORMENTE PROPONEMOS  
PARA ESTE NUCLEO UN DESARROLLO  
DEL TIPO

$$K(x, y) = \sum_{j=0}^N \lambda_j(y) \phi_j^*(x)$$

(ahora con  $\phi_j^*(x)$  que no es  
estrictamente función propia)  
PERO ESTAN ORTONORMALIZADAS

SERA:

$$\chi_j(y) = \int_a^b k(x, y) \phi_j^*(x) dx =$$

$$= \sum_{e=0}^j C_{je} \int_a^b k(x, y) \phi_e(x) dx$$

$$= \sum_{e=0}^j C_{je} \lambda_e \phi_e(y)$$

ENTONCES EL NUCLEO

$$k(x, y) = \sum_{j=0}^N \phi_j^*(x) \sum_{e=0}^j C_{je} \lambda_e \phi_e(y)$$

$$= \sum_{e=0}^N \lambda_e \phi_e(y) \sum_{j=e}^N C_{je} \phi_j^*(x)$$

LA DEPENDENCIA FUNCIONAL DE  $k(x, y)$  CON  $y$  ES LA MISMA DE ANTES.

PERO LOS COEFICIENTES SON DIFERENTES.

LA FACTORIZACION (DEGENERACION) DEL NUCLEO, ANTES ERA DIAGONAL, AHORA ES TRIANGULAR.

NO HAY SIMETRIA.

NOS INTERESA ESCRIBIR LA DEPENDENCIA EN FUNCION DE  $\phi_j^*(y)$

EN CIERTO MODO SERÁ INVERTIR  
LA RELACIÓN (GRAM-SCHMIDT)

$$\phi_j^*(y) = \sum_{e=0}^j C_{je} \phi_e(y)$$

PROPONEMOS PARA LA INVERSA

$$\phi_e(y) = \sum_{k=0}^e D_{ek} \phi_k^*(y)$$

SERA

$$\begin{aligned} D_{ek} &= \langle \phi_e(y), \phi_k^*(y) \rangle = \int_a^b \phi_e(y) \phi_k^*(y) dy \\ &= \sum_{m=0}^k C_{km} \langle \phi_e(y), \phi_m(y) \rangle \end{aligned}$$

LUEGO EN FUNCIÓN DEL COEFICIENTE  
DE NORMALIZACIÓN DE LAS FUNCIONES  
PROPIAS Y DE LOS COEFICIENTES  
DE ORTONORMALIZACIÓN  $C_{km}$

SE TIENEN DIRECTAMENTE LOS  
COEFICIENTES DE LA MATRIZ TRIANGULAR  
INVERSA. CON ELLOS

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \sum_{e=0}^N \lambda_e \sum_{k=0}^e D_{ek} \phi_k^*(y) \sum_{j=e}^N C_{je} \phi_j^*(x) \\ &= \sum_{k=0}^N \phi_k^*(y) \sum_{j=k}^N \phi_j^*(x) \sum_{e=j}^N D_{ek} \lambda_e C_{je} \end{aligned}$$

DESCOMPOSICIÓN TRIANGULAR  
DEL NUCLEO EN FUNCIONES  
ORTONORMALES

15-2

DESCOMPOSICION ESPECTRAL  
SINGULAR



EL HECHO ES, COMO VIMOS, QUE LA  
DESCOMPOSICION ESPECTRAL EN  
FUNCIONES PROPIAS DEL OPERADOR

$$\int_a^b K(x, y) \dots dx$$

DEFINIDAS POR

$$\int_a^b K(x, y) \psi(x) dx = \lambda \psi(y)$$

$\lambda$  : VALOR PROPIO

$\psi(x) = \psi(y)$  FUNCION PROPIA

ES SOLO, TEORICAMENTE POSIBLE,  
EN EL CASO DE UN OPERADOR  
SIMETRICO

Y, EN LA PRACTICA SERA SOLO  
POSIBLE EN MUY POCOS CASOS

por ejemplo el caso (que vimos)  
de la CONVOLUCION GAUSSIANA:

THE WEIERSTRASS TRANSFORM.

TAMBIEN VIMOS QUE ESAS FUNCIONES  
ESTRICTAMENTE PROPIAS PUEDEN NO  
SER LA MEJOR REPRESENTACION  
DE LAS FUNCIONES  $f(x)$  Y  $g(y)$   
FRENTE A LOS PROBLEMAS DE  
INESTABILIDADES EN LA INVERSION  
DE LA TRANSFORMADA:

PODEMOS NECESITAR MUCHOS,  
MUCHISIMOS TERMINOS EN EL  
DESARROLLO DE  $g(y)$ , Y ELLO  
SUPONDRA' RIESGOS GRANDES  
DE TRABAJAR CON COEFICIENTES  
RELATIVAMENTE GRANDES DIVIDIDOS  
POR AUTOVALORES MUY PEQUEÑOS.

UN PASO MUY IMPORTANTE PARA  
RESOLVER ESTOS PROBLEMAS (AL  
MENOS EN TEORIA) CONSERVANDO  
LA SIMPLICIDAD Y EL RIGOR  
MATEMATICO SE BASA EN LA  
EXPANSION ESPECTRAL SINGULAR  
(LANCZOS)

SEA LA TRANSFORMADA INTEGRAL

$$\int_a^b k(x, y) f(x) dx = g(y)$$

QUE CORRESPONDE AL OPERADOR

$$\int_a^b k(x \rightarrow y) \dots dx$$

$x$  VARIABLE INPUT

$y$  VARIABLE OUTPUT

QUE PROYECTA EL ESPACIO

$a \leq x \leq b$  DONDE SE DESARROLLAN  
LAS FUNCIONES  $f(x)$  EN EL  
ESPACIO  $A \leq y \leq B$  DONDE SE  
DESARROLLAN LAS FUNCIONES  
IMAGEN  $g(y)$

AMBOS ESPACIOS FUNCIONALES  
PUEDEN SER DIFERENTES

LOS NUCLEOS, MEJOR LOS  
OPERADORES NO TIENEN  
POR QUE SER SIMÉTRICOS

SUPONGAMOS QUE SABEMOS ENCONTRAR  
EL OPERADOR TRANSPUERTO

$$\int_A^B \tilde{K}(y \rightarrow x) \dots dy$$

$y$  VARIABLE INPUT

$x$  VARIABLE OUTPUT

QUE PROYECTA EL ESPACIO DE  
LAS FUNCIONES  $g(y)$  SOBRE EL  
ESPACIO DE LAS FUNCIONES  $f(x)$

EL NUCLEO GUARDA LA MISMA  
FORMA FUNCIONAL, AUNQUE  
AHORA SE INTEGRE SOBRE LA  
VARIABLE  $y$

EL PROBLEMA DE LOS LÍMITES  
DE LA INTEGRAL ES MÁS DELICADO  
(SOBRE TODO SI SE TRATA DE  
UNA INTEGRAL DE VOLTERRA)

EN FORMA MATRICIAL

NO HABÍA PROBLEMAS  
PERO AHORA LOS PEROS DE  
INTEGRACION SERÁN DIFERENTES

LAS FUNCIONES  $\psi_k(x)$ ,  $\psi_k(y)$  Y  
VALORES  $\mu_k$  PROPIOS SINGULARES

SON LAS SOLUCIONES DE

$$\int_a^b k(x \rightarrow y) \psi_k(x) dx = \mu_k \psi_k(y)$$

$$\int_a^B k(y \rightarrow x) \psi_k(y) dy = \mu_k \psi_k(x)$$

O BIEN DE

$$\int_a^B k(y \rightarrow z) dy \int_a^b k(x \rightarrow y) \psi_k(x) dx \\ = \mu_k^2 \psi_k(z)$$

EL ENCONTRAR ESTAS FUNCIONES  
PARA UN OPERADOR

$$\int_a^b k(x, y) \dots dx$$

DADO, NO ES TAREA FACIL, PERO  
ES MUCHO MAS FACIL HACERLO EN  
TÉRMINOS DE ORDENADAS DISCRETAS:  
MATRICES.

ENTONCES; CONOCIDAS LAS  
FUNCIONES  $\psi_k(x)$ ,  $\psi_k(y)$  Y VALORES  $\mu_k$   
PROPIOS SINGULARES DE UN  
OPERADOR: TRANSFORMADA  
INTEGRAL (\*)

SI SE DESARROLLAN LOS DATOS  
 $g(y)$  EN LA FORMA

$$g(y) = \sum_k \beta_k \psi_k(y)$$

LA FUNCION OBJETO SEAN

$$f(x) = \sum_k \frac{\beta_k}{\mu_k^2} \psi_k(x)$$

CON RIESGOS DE INESTABILIDAD  
SI LOS VALORES PROPIOS  $\mu_k^2$  SON  
MUY PEQUEÑOS

(\*) LANÇEDS DEMUESTRA QUE SON  
ORTOGONALES, CADA UNA EN SU  
ESPACIO

## ANALISIS

OCURRE QUE PARA UN OPERADOR DADO CUALQUIERA, EL ENCONTRAR LAS FUNCIONES (Y VALORES) PROPIOS SINGULARES, ES TAN COMPLICADO (O IMPOSIBLE), COMO EL ENCONTRAR LAS FUNCIONES PROPIAS ESTRICTAS

NO ES TAREA FACIL EL RESOLVER LA ECUACION ESPECTRAL

$$\int_A^B K(y \rightarrow z) dy \int_a^b K(x \rightarrow y) \varphi_k(x) dx = \mu_k^2 \varphi_k(z)$$

NO OBSTANTE ESTA DESCOMPOSICIÓN SINGULAR QUE EQUIVALE A DESARROLLAR EL NUCLEO  $K(x, y)$  EN UNA FORMA DIAGONAL

$$K(x, y) = \sum_k \mu_k^2 \varphi_k(x) \varphi_k(y)$$

NOS HA PROPORCIONADO EL CUADRO TETRICO PARA PODER TRATAR ESPECTRALMENTE FUNCIONES  $f(x)$  Y  $g(y)$  QUE PERTENECEN A ESPACIOS DIFERENTES, LO CUAL, EN LA PRACTICA SERA SIEMPRE EL CASO

## EJEMPLO: LAPLACE

$$\int_0^{\infty} e^{-x\eta} \phi_{\lambda}^{\mu}(x) dx = \lambda^{\mu} \phi_{\lambda}^{\mu}(\eta)$$

NO SE CONOCEN FUNCIONES  
PROPIAS ESTRICTAS

### LAS SINGULARES

$$\int_0^{\infty} d\eta e^{-\eta z} \int_0^{\infty} e^{-x\eta} \phi(x) dx = \mu^2 \phi(z)$$

$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{x+z} \phi(x) = \mu^2 \phi(z)$$

NO SE CONOCEN, TAMPOCO,  
SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN  
ANTERIOR.



PERO LO MÁS IMPORTANTE ES QUE  
EL PROCESO DE INVERSIÓN VIA  
DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL SINGULAR  
AL IGUAL QUE EL PROCESO DE  
INVERSIÓN VIA DESCOMPOSICIÓN  
ESPECTRAL ESTRICTA

DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL

$$g(y) = \int_a^b k(x, y) f(x) dx$$

PARA UNOS DATOS  $g(y)$  DADOS EN  
FORMA DE SERIE FINITA DE LAS  
FUNCIONES PROPIAS  $\psi_k(y)$  :

$$g(y) = \sum_{k=1}^N \beta_k \psi_k(y)$$

NO CONTEMPLA (NO UTILIZA)  
TODO EL NUCLEO

$$k(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \psi_k(x) \psi_k(y)$$

SINO SOLAMENTE LA PARTE  
NECESARIA PARA EXPLICAR  
(SINTETIZAR) LOS DATOS  $g(y)$  :

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^N \mu_k^2 \psi_k(x) \psi_k(y)$$

ESTA PROPIEDAD SUPRIME MUCHÍSIMAS  
INESTABILIDADES

EN LOS MÉTODOS DE  
"ORDENADAS DISCRETAS"  
SE TRABAJARÁ CON TODO  
EL NUCLEO, EN TODOS  
LOS CASOS