14

DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL ESTRICTA

14 - 1

FUNCIONES Y VALORES PROPIOS V. S. INVERSIÓN

INVERSIÓN DE UNA TRANSFORMADA INTEGRAL UTILIZANDO SUS FUNCIONES PROPIAS

$$g(y) = \int_a^b K(x, y)\, f(x)\, dx$$

$\phi_j(x)$ ES UNA FUNCIÓN PROPIA DEL OPERADOR

$$\int_a^b K(x,y) \cdots\cdots dx$$

SI

$$\lambda_j \phi_j(y) = \int_a^b K(x,y)\, \phi_j(x)\, dx$$

λ_j cte VALOR PROPIO CORRESPONDIENTE

EL CONJUNTO DE FUNCIONES PROPIAS $\phi_j(x)$ Y EL DE LOS VALORES PROPIOS CORRESPONDIENTES CONSTITUYE EL ESPECTRO DEL OPERADOR.

EN LÍNEAS GENERALES

LAS POSIBILIDADES DE OBTENER LAS FUNCIONES PROPIAS DE UN OPERADOR INTEGRAL SON MUY ESCASAS, POR LO TANTO NO SE PUEDE CONSIDERAR TAL POSIBILIDAD PARA OBTENER UN **METODO DE INVERSION** QUE SE PUEDA APLICAR DE MANERA ESTANDARD.

NO OBSTANTE, **BAJO EL PUNTO DE VISTA PEDAGÓJICO** UN HIPOTETICO DESARROLLO EN FUNCIONES PROPIAS, NOS PERMITIRA HACER UN NUEVO ESTUDIO-RESUMEN SOBRE LA ESTABILIDAD Y POSIBILIDAD DE UNA INVERSIÓN.

SI DISPONEMOS DEL ESPECTRO DEL OPERADOR INTEGRAL : $\underline{\lambda_J}$, $\underline{\phi_J}(x)$

$$\int_a^b K(x,y) \dots dx$$

Y LOGRAMOS DESARROLLAR LA FUNCIÓN DATO $g(y)$ EN SERIE DE ESAS FUNCIONES PROPIAS

$$g(y) = \sum \beta_J \, \phi_J(y)$$

PARA INVERTIR LA TRANSFORMADA INTEGRAL

$$g(y) = \int_a^b K(x,y) \, f(x) \, dx$$

PODREMOS PROPONER PARA LA FORMA FUNCIONAL

$$f(x) = \sum_J \alpha_J \, \phi_J(x)$$

SIENDO EVIDENTEMENTE

$$\alpha_J = \frac{\beta_J}{\lambda_J}$$

LA CUESTIÓN ESTRIBA EN EL

... Y LOGRAMOS DESARROLLAR LA FUNCIÓN DATO $g(y)$ EN SERIE DE ESAS FUNCIONES PROPIAS $\phi_J(y)$ DEL OPERADOR EN CUESTIÓN

EN PRIMER LUGAR, PARA DISPONER DEL DESARROLLO

$$g(y) \simeq \sum_J \beta_J \phi_J(y)$$

EL CALCULO DE LOS COEFICIENTES β_J TENDRÍA QUE HACERSE DE ALGUNA FORMA **RELATIVAMENTE FACIL** $\Rightarrow$

NECESIDAD DE QUE LAS FUNCIONES $\phi(y)$ SEAN **ORTOGONALES**

ENTONCES

$$\beta_J = \int_a^b g(y)\,\phi_J(y)\,dy$$

$\phi(y)$ ORTONORMAL

$$\int_a^b \phi_J(y) \cdot \phi_K(y)\,d = \delta_{JK}$$

SI NO SON ORTONORMALES

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

$$\phi_J(x) \rightarrow \phi_J^*(x)$$

$$\int_a^b \phi_J^*(x)\ \phi_K^*(x)\ dx = \delta_{JK}$$

ES RELATIVAMENTE FACIL ENCONTRAR LOS COEFICIENTES C_{Jl} DEL DESARROLLO

$$\phi_J^*(x) = \sum_{l=0}^{J} C_{Jl}\ \phi_l(x)$$

ENTONCES SE PODRA DESARROLLAR $g(y)$ EN LA FORMA

$$g(y) = \sum_{J=0}^{N} \beta_J\ \phi_J^*(y)$$

SIENDO

$$\beta_J = \int_a^b g(y)\ \phi_J^*(y)\ dy$$

SERA

$$g(y) = \sum_{J=0}^{N} \beta_J \sum_{l=0}^{J} C_{Jl}\ \phi_l(y) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \phi_l(y) \sum_{J=l}^{N} \beta_J C_{Jl}$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \beta_l^*\ \phi_l(y)$$

RECUPERAMOS LA FORMA ADECUADA PARA INVERTIR

QUEDA TODAVÍA LA CUESTIÓN DE SÍ CUALQUIER $g(y)$ SE PUEDE DESARROLLAR -COMO SE HA DESCRITO ANTERIORMENTE- EN SERIE DE ESAS FUNCIONES PROPIAS ORTONORMALIZADAS $\phi_j(y)$

LA RESPUESTA ES: GENERALMENTE **NO** PARA CUALQUIER $g(y)$

PERO A NOSOTROS NO NOS INTERESA CUALQUIER $g(y)$

SÍNO UN $g(y)$ QUE PUEDA SER PROTAGONISTA DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL

$$g(y) = \int_a^b K(x, y)\, f(x)\, dx$$

PARA CUALQUIER $f(x)$

NUESTRO $g(y)$; CUALQUIER $g(y)$ QUE TENGAMOS COMO DATO PARA EL PROBLEMA DE LA INVERSIÓN DEPENDERÁ **NATURALMENTE** DE $f(x)$ - QUE PUEDE SER CUALQUIERA - PERO DEBERÁ CONSERVAR LA MISMA DEPENDENCIA FUNCIONAL CON y QUE LA QUE TIENE EL NÚCLEO $K(x, y)$: VEAMOS COMO ES

¿COMO VARIA $K(x,y)$ CON y?

PUES VARIARÁ COMO SUS FUNCIONES PROPIAS $\phi_J(y)$

SUPONGAMOS QUE ESTAS SON NATURALMENTE ORTONORMALES: NUCLEO **SIMETRICO**.

PROPONDREMOS PARA $K(x,y)$ UN DESARROLLO EN FUNCIÓN DE ESAS FUNCIONES PROPIAS, PARA LA VARIABLE x.

$$K(x,y) = \sum_J \chi_J(y)\, \phi_J(x)$$

CADA COEFICIENTE $\chi_J(y)$ SERÁ

$$\chi_J(y) = \int_a^b K(x,y)\, \phi_J(x)\, dx$$

$$= \lambda_J\, \phi_J(y)$$

CON LO CUAL EL DESARROLLO DEL NUCLEO SERÁ

$$K(x,y) = \sum_J \lambda_J\, \phi_J(x)\, \phi_J(y)$$

FACTORIZACION DE LAS FUNCIONES INPUTS $\phi_J(x)$ Y DE LAS FUNCIONES OUTPUTS $\phi_J(y)$ DE UNA FORMA

SIMETRICA

MAS TARDE VEREMOS COMO
SE FACTORIZA EL NUCLEO
CUANDO NO ES SIMÉTRICO

PARA COMENZAR DIREMOS
QUE VA A SER MUY DIFICIL
EL ENCONTRAR SU ESPECTRO:
VALORES Y FUNCIONES
PROPIAS EN SENTIDO
ESTRICTO

SERÁ UNA FACTORIZACIÓN
TRIANGULAR: NO DIAGONAL
COMO EN EL CASO ANTERIOR

UNA VEZ VISTA LA DEPENDENCIA DEL NUCLEO $K(X,Y)$ CON Y

Y COMO ESTE NUCLEO SE FACTORIZA EN SUS PROPIAS **FUNCIONES PROPIAS**

PARA CUALQUIER $f(x)$ SERA

$$g(y) = \int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx$$

$$= \sum_j \lambda_j\, \phi_j(y) \int_a^b \phi_j(x)\, f(x)\, dx$$

LOS COEFICIENTES DEL DESARROLLO

$$g(y) = \sum_j \beta_j\, \phi_j(y)$$

$$\beta_j = \lambda_j \int_a^b \phi_j(x)\, f(x)\, dx = \lambda_j\, \alpha_j$$

PODRÁN TOMAR CUALQUIER VALOR PERO LA DEPENDENCIA CON y RESPONDE A ESE DESARROLLO

LUEGO, SEA O NO COMPLETO EL CONJUNTO DE FUNCIONES ORTONORMALES $\phi_j(y)$, CUALQUIER $g(y)$ **PROTAGONISTA** DEL PROBLEMA, PODRÁ DESARROLLARSE EN LA FORMA DISCUTIDA

SI $g(y)$ POR ERRORES, O POR CUALQUIER OTRA RAZÓN ESPURÈA, NO SATISFACE TAL POSIBILIDAD (NATURALMENTE DENTRO DE UN NUMERO DECENTE DE TERMINOS) ES EVIDENTE QUE ESTAMOS FRENTE A UN **PROBLEMA MAL PLANTEADO.**

PERO NO ES FALTA DEL PROBLEMA, ES CULPA DE LA FORMA CON QUE LE DAMOS LOS DATOS AL ALGORITMO, Y DE LA CALIDAD DE ESTOS DATOS.

DEBEMOS TODAVÍA ESTUDIAR UN PUNTO IMPORTANTE

CONCIERNE A LA "RECUPERACIÓN" DE LA INFORMACIÓN EN LA "RECONSTITUCIÓN" DE $f(x)$

$f(x)$ PUEDE SER CUALQUIERA Y NOSOTROS NECESITAMOS MUCHA INFORMACIÓN PARA DETERMINARLA.

PERO, A PARTIR DE LA INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL ENCONTRAMOS EL DESARROLLO

$$f(x) = \sum_{J=1}^{N} \alpha_J \phi_J(x)$$

CON $$\alpha_J = \frac{\beta_J}{\lambda_J}$$

SIENDO EL COEFICIENTE DEL DESARROLLO DE LA FUNCIÓN DATO $g(y)$:

$$g(y) = \sum_{J=1} \beta_J \phi_J(y)$$

INDEPENDIENTEMENTE DE QUE λ_J PUEDE SER MUY PEQUEÑO E INTRODUCIR INESTABILIDADES

(ESTUDIAREMOS ENSEGUIDA ESTE PUNTO)

EL DESARRO ANTERIOR DE $g(y)$

PUEDE POR FALTA DE INFORMACIÓN PRACTICA EN LOS DATOS $g(y)$ OBSERVADOS / MEDIDOS ESTAR LIMITADO A UN ORDEN N PEQUEÑO.

ENTONCES NO PODREMOS - A PARTIR DE LA INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL - DECIR SOBRE $f(x)$ NADA MAS QUE LO QUE CORRESPONDE A SU DESARROLLO

$$f(x) = \sum_{j} \alpha_j \phi_j(x)$$

PROBLEMA MAL PLANTEADO: PERDIDA DE INFORMACIÓN.

OCUPÉMONOS AHORA DE LA INFLUENCIA DEL VALOR DE LOS AUTOVALORES λ_J ES DECIR, DE LA INESTABILIDAD

DEBEMOS REALIZAR QUE LAS FUNCIONES PROPIAS $\phi_J(x)$ SON ORTONORMALES:

$$\int_a^b \phi_J(x)\, \phi_K(x)\, dx = \delta_{JK}$$

PARA QUE ESTO PUEDA OCURRIR CADA UNA DE ELLAS TENDRÁ PARTES POSITIVAS Y PARTES NEGATIVAS

ES DECIR, EN CIERTO MODO, CADA UNA DE ELLAS OSCILARA, Y OSCILARA DE POSITIVA A NEGATIVA CON UNA FRECUENCIA MAYOR A MEDIDA QUE AUMENTA SU ORDEN (ESTO ES ASÍ, NADA MÁS QUE POR CONSTRUCCIÓN)

ENTONCES, ES DE ESPERAR QUE LOS COEFICIENTES β_J

$$\beta_J \equiv \int_a^b g(y)\, \phi_J(y)\, dy$$

SEAN CADA VEZ MAS PEQUEÑOS (A MEDIDA QUE SU ORDEN - VALOR DE J - AUMENTA)

ENTONCES CUANDO SE TRATE DEL DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EXPERIMENTAL g(y), SI ESTO NO OCURRE, INDICARÁ QUE ~~SUS~~ COMPONENTES DE ALTA FRECUENCIA SON IMPORTANTES

Y, DE NO SER CONSCIENTES "A PRIORI" QUE g(y) ES UN "BICHO RARO", ES MUY POSIBLE QUE SE TRATE DE ERRORES (ALEATORIOS O SISTEMÁTICOS) QUE COINCIDAN CON LA FRECUENCIA DE LOS PUNTOS EN LOS QUE TENEMOS LAS MEDIDAS: "PÍXELS"

ENTONCES, MAS VALE FILTRAR Y VER QUE OCURRE CON EL DESARROLLO: SI SE SIGUE PRÓXIMO DE LA g(y) DATO SIN ESAS FLUCTUACIONES DE ALTA FRECUENCIA.

PERO, POR LAS MISMAS RAZONES: FLUCTUACIONES POSITIVO NEGATIVO QUE AUMENTAN CUANDO EL ORDEN J AUMENTA

EN EL DESARROLLO DEL NUCLEO

$$K(X,y) = \sum_J \lambda_J \, \phi_J(x) \, \phi_J(y)$$

LOS AUTOVALORES λ_J SERÁN CADA VEZ MAS PEQUEÑOS: EL NUCLEO SE APROXIMA CADA VEZ MAS, A MEDIDA QUE J AUMENTA

SI QUEREMOS EVITAR CATASTROFES EN LA INVERSION, ES DECIR EN EL DESARROLLO EN SERIE

$$f(x) = \sum_J \alpha_J \, \phi_J(x)$$

CON

$$\alpha_J = \frac{\beta_J}{\lambda_J}$$

DEBEMOS CONTROLAR QUE LA VARIACIÓN: DECRECIMIENTO DE β_J, SEA MÁS RÁPIDA (O IGUAL) QUE LA DE λ_J

PERO LA DISMINUCIÓN DE LOS AUTOVALORES λ_J ES UNA CARACTERÍSTICA PROPIA DEL PROBLEMA, DONDE NOSOTROS NO PODEMOS HACER NADA

LA DETERMINACIÓN DE LOS VALORES DE LOS COEFICIENTES β_J DEPENDE DE LA **CALIDAD** DE LOS DATOS Y DE LA MANERA NUMÉRICA DE CALCULARLOS

AQUÍ SÍ QUE PODEMOS INTER-VENIR Y TENER CUIDADO:

FILTRAR

A VECES CON POCOS TÉRMINOS EN EL DESARROLLO DE

$$g(y) = \sum_J \beta_J \phi_J(y)$$

TENEMOS UNA BUENA DESCRIPCIÓN DE LA $g(y)$ MEDIDA

LA INVERSIÓN SERÁ CÓMODA

PERO PUEDE QUE PARA DETERMINAR UNA $f(x)$ FÍSICAMENTE CORRECTA NECESITÁSEMOS MÁS INFORMACIÓN

AUNQUE MÁS VALE **POCO CORRECTO** QUE **MUCHO ABSURDO**

FINALMENTE

PARA REPRESENTAR BIEN LOS DATOS $g(y)$ QUIZÁS NO NECESITEMOS MUCHAS

$$g(y) = \sum_{J} \beta_J \varphi_J(y)$$

AQUI LA SUMA PUEDE TENER POCOS SUMANDOS. SI $g(y) = \varphi_K(y)$ TENDRÍA UNO SÓLO

ESTO QUIERE DECIR QUE EL <u>MÉTODO DE INVERSIÓN</u> POR DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL PROPIA NO UTILIZA EL OPERADOR COMPLETO. UTILIZA SOLO LA PARTE QUE HA INTERVENIDO EN LA GENERACIÓN DE LOS DATOS PARTICULARES $g(y)$

UNA GRAN VENTAJA

BAJO OTRO PUNTO DE VISTA

SI EL CONJUNTO $\{\phi_J(x)\}$ DE FUNCIONES PROPIAS DEL OPERADOR ESTA ORTO-NORMALIZADO

EL PROCESO ANTERIOR EQUIVALE A DESCOMPONER EN NUCEO $K(x,y)$ EN LA FORMA

$$K(x,y) = \sum_J \lambda_J \phi_J(x) \phi_J(y)$$

¿ CUANTAS FUNCIONES $\phi_J(x)$ NECESITAREMOS ?

SI SE TRATARA DE REPRESENTAR BIEN EL NUCLEO $K(x,y)$ QUIZAS NECESITARIAMOS MUCHISIMAS

PERO LO QUE TENEMOS QUE HACER ES REPRESENTAR BIEN LOS DATOS $g(y)$

14.2

FUNCIONES Y VALORES PROPIOS PARA OPERADORES DE CONVOLUCIÓN: FOURIER

CONVOLUCIONES

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\, f(x)\, dx$$

SE TRATA DE ENCONTRAR

FUNCIONES PROPIAS $\varphi(x) \to \varphi(y)$

Y LOS CORRESPONDIENTES

VALORES PROPIOS λ

TALES QUE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\, \varphi(x)\, dx = \lambda\, \varphi(y)$$

HAGAMOS

$$x - y = z$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\,\varphi(z+y)\,dz$$

¿EXISTEN FUNCIONES $\varphi(x)$ TALES QUE

$$\varphi(z+y) = \varphi(z)\cdot\varphi(y) \text{ ?}$$

EVIDENTEMENTE SI:

UNA EXPONENCIAL

$$e^{k(z+y)} = e^{kz}\cdot e^{ky}$$

LUEGO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\,e^{kx}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\,e^{kz}\,e^{ky}\,dz =$$

$$= e^{ky}\int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\,e^{kz}\,dz$$

LUEGO e^{kx} ó e^{ky}

SON FUNCIONES PROPIAS DE CUALQUIER OPERADOR DE CONVOLUCIÓN

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) \cdots \, dx$$

Y

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z) \, e^{kz} \, dz$$

ES EL CORRESPONDIENTE VALOR PROPIO

CUIDADO: NOTACIÓN K PARA EL NUCLEO $K(x-y)$ Y NOTACIÓN k PARA EL EXPONENTE DE e^{kx} o e^{ky} NO TIENE NADA QUE VER

PERO, LAS EXPONENCIALES REALES

$$e^{\pm kx} \qquad e^{\pm y}$$

NO FORMAN ENTRE

$$-\infty < x < \infty \qquad -\infty < y < \infty$$

NINGUNA BASE DE FUNCIONES CON SIGNIFICADO FISICO:
QUE REPRESENTEN FENÓMENOS FISICOS QUE NO SEAN INFINITO

SIN EMBARGO,

LAS EXPONENCIALES IMAGINARIAS

$$e^{\pm i\omega x} \qquad e^{\pm i\omega y}$$

$$k = i\omega$$

SON ORTOGONALES ENTRE SI

Y CUALQUIER FUNCION DECENTE

SE PUEDE DESARROLLAR EN SERIE DE ELLAS: FOURIER

$$e^{\pm i\omega z} = \cos \omega z \pm i \,\mathrm{sen}\, \omega z$$

$\cos \omega z$ y $\mathrm{sen}\, \omega z$

SON FUNCIONES ORTOGONALES
Y FORMAN UNA BASE

$$\omega = \frac{2\pi}{L}$$

ω FRECUENCIA

L LONGITUD DE ONDA

Si $$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)\, f(x)\, dx$$

$$f(x) = \int d\omega \; F(\omega)\, e^{i\omega x}$$

$$g(y) = \int d\omega \; G(\omega)\, e^{i\omega y}$$

$F(\omega)$ T. F. de $f(x)$

$G(\omega)$ T. F. de $g(y)$

ES DECIR

$F(\omega)$ COEFICIENTES EN EL DESARROLLO DE $f(x)$ EN FUNCIONES ORTOGONALES $e^{i\omega x}$

COEFICIENTES EN EL DESARROLLO DE $g(y)$ EN FUNCIONES ORTOGONALES $e^{i\omega y}$

FOURIER $G(\omega) = K(\omega) \cdot F(\omega)$

$K(\omega)$ AUTOVALORES DEL OPERADOR CONVOLUCIÓN

$$F(\omega) = \frac{G(\omega)}{K(\omega)}$$

$K(\omega)$ PUEDEN SER MUY PEQUEÑOS

INESTABILIDAD

$G(\omega)$: DATOS

EJEMPLO 1

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} e^{-\left(\frac{x-y}{\sigma}\right)^2} f(x)\, dx$$

CONVOLUCIÓN GAUSSIANA

σ SEMI-ANCHURA CARACTERISTICA DEL NUCLEO

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} e^{-\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2}$$

EL VALOR PROPIO λ_ω CORRESPONDIENTE A LA FUNCION PROPIA $e^{i\omega z}$:

$$\underline{\lambda_\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\, e^{i\omega z} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} e^{\left(\frac{i\omega\sigma}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{z}{\sigma} - \frac{i\omega\sigma}{2}\right)^2} dz$$

$$= \underline{e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{4}}} = \underline{e^{-\pi^2\left(\frac{\sigma}{L}\right)^2}}$$

$\omega = \frac{2\pi}{L}$ SI LA LONGITUD DE ONDA L DE CADA MODO $e^{i\omega x}$ ES MUCHO MENOR QUE LA ANCHURA DEL NUCLEO σ (FRECUENCIA ω MUY GRANDE)

AUTOVALOR $\lambda_\omega \to 0$ RIESGOS DE INESTABILIDAD

EJEMPLO 2

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-\Delta < x-y < \Delta)\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} f(x)\, dx$$

$$K(z) = u(-\Delta < x-y < \Delta)$$

AUTOVALORES λ_ω CORRESPONDIENTES A $e^{i\omega x}$

$$\underline{\lambda_\omega} = \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{i\omega x}\, dx = \frac{1}{i\omega}\left[e^{i\omega\Delta} - e^{-i\omega\Delta}\right]$$

$$= \underline{\frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega\Delta}$$

PARA FRECUENCIAS GRANDES

$\lambda_\omega \to 0$ PERO MENOS RAPIDAMENTE QUE EN EL EJEMPLO ANTERIOR.

ESTAMOS ANTE UNA CONVOLUCION MEJOR CONDICIONADA

SIN EMBARGO CUANDO $\omega\Delta = N\pi$ $(N = 0, 1, 2, \dots)$ $\lambda_\omega = 0$

SE PIERDE ABSOLUTAMENTE LA INFORMACION (no se puede recuperar)

LAS FUNCIONES $e^{\pm i\omega x}$

SON PUES FUNCIONES PROPIAS
DE CUALQUIER OPERADOR DE
CONVOLUCIÓN, SON ORTOGONALES.
LAS PODREMOS PUES UTILIZAR
PARA INVERTIR ÉSTE.

LA ÚNICA SALVEDAD QUE PODEMOS
HACER (A LA VISTA DE LO DICHO
ANTERIORMENTE) Y QUE CONSTITUÍA
UNA REGLA DE ORO:

EL DESARROLLO DE $g(y)$ DEBE
DE SER LO MÁS "AJUSTADO" POSIBLE:
DEBEMOS APROXIMARNOS A $g(y)$ CON
EL MENOR NÚMERO DE TÉRMINOS
POSIBLE

PARA NO CORRER EL RIESGO
DE QUE AL TENER TÉRMINOS ALTOS
NOS APAREZCA EL RIESGO DE
DIVIDIR POR UN AUTOVALOR
MUY MUY PEQUEÑO: INESTABILIDAD

POR ESO ES MUY INTERESANTE
EL ESTUDIAR SI EL CITADO
OPERADOR DE CONVOLUCIÓN TIENE
OTROS CONJUNTOS DE FUNCIONES
PROPIAS MAS PRÓXIMAS DEL
FENÓMENO EN ESTUDIO

MAS ADECUADAS PARA
DESCRIBIR LAS FUNCIONES
PROTAGONISTAS

AUNQUE MENOS UNIVERSALES:
DIFERENTES PARA CADA OPERADOR.

NO OLVIDAR LAS FUNCIONES
PROPIAS GENERALIZADAS (LANCZOS)

PERO, LAS EXPONENCIALES

$$e^{\pm i\omega z}$$

ES LA ÚNICA POSIBILIDAD QUE TENEMOS PARA FORMAR UNA BASE DE FUNCIONES PROPIAS DE UN OPERADOR DE CONVOLUCIÓN?

CUALQUIER OTRA FUNCIÓN $\varphi(x)$ TAL QUE

$$\varphi(y+z) = \varphi(y)\cdot\chi(z)$$

SI EXISTIERAN

SERIAN FUNCIONES PROPIAS

$$\varphi(x) \rightleftarrows \varphi(y)$$

CON EL VALOR PROPIO

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\,\chi(z)\,dz$$

A PRIORI...
ES MÁS FACIL BUSCAR OTRAS POSIBILIDADES QUE YA VEREMOS

FUNCIÓN PROPIA, CONCEPTO MUY RESTRINGIDO.

14.3

ORTO NORMALIZACIÓN

MÉTODO DE ORTONORMALIZACIÓN

SEA UN CONJUNTO DE FUNCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES:

$$\{ \phi_n(x) \} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots N$$

NO ORTOGONALES.

QUEREMOS ENCONTRAR UNAS COMBINACIONES LINEALES DE ELLAS:

$$\phi_n^{\circ}(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \, \phi_j(x)$$

QUE SEAN ORTONORMALES

PRODUCTO ESCALAR

$$\langle \phi_j(x) . \phi_k(x) \rangle = \int_a^b W(x) \, \phi_j(x) \, \phi_k(x) \, dx$$

EN EL ESPACIO QUE SEA

$$\langle \phi_j^{\circ}(x) . \phi_j^{\circ}(x) \rangle = 1$$

$$\langle \phi_j^{\circ}(x) . \phi_k^{\circ}(x) \rangle = 0 \qquad \text{si } j \neq k$$

PROPONEMOS

$$\phi_1^0(x) = \lambda_1 \; \phi_1(x)$$

NORMALIZACION $\langle \phi_1^0(x) . \phi_1^0(x) \rangle = 1$

$$1 = \lambda_1^2 \langle \phi_1(x) . \phi_1(x) \rangle$$

$\Rightarrow \lambda_1$

PROPONEMOS

$$\phi_2^0(x) = \lambda_2 \left[C_{21} \; \phi_1^0(x) + \phi_2(x) \right]$$

ORTOGONALIDAD $\langle \phi_1^0(x) . \phi_2^0(x) \rangle = 0$

$$C_{21} + \langle \phi_1^0(x) \; \phi_2(x) \rangle = 0$$

$\Rightarrow C_{21}$

NORMALIZACION $\langle \phi_2^0(x) . \phi_2^0(x) \rangle = 1$

$$1 = \lambda_2^2 \left[C_{21}^2 + 2 \, C_{21} \langle \phi_1^0(x) \; \phi_2(x) \rangle + \langle \phi_2(x) \; \phi_2(x) \rangle \right]$$

$$= \lambda_2^2 \left[- C_{21}^2 + \langle \phi_2(x) . \phi_2(x) \rangle \right]$$

$\Rightarrow \lambda_2$

PROPONEMOS

$$\phi_3^0(x) = \lambda_3 \left[C_{31}\, \phi_1^0(x) + C_{32}\, \phi_2^0(x) + \phi_3(x) \right]$$

ORTOGONALIDAD $\langle \phi_1^0(x)\, \phi_3^0(x) \rangle = 0$

$$C_{31} + \langle \phi_1^0(x)\, \phi_3(x) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow C_{31}$$

ORTOGONALIDAD $\langle \phi_2^0(x)\, \phi_3^0(x) \rangle = 0$

$$C_{32} + \langle \phi_2^0(x)\, \phi_3(x) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow C_{32}$$

NORMALIZACION $\langle \phi_3^0(x) \cdot \phi_3^0(x) \rangle = 1$

$$1 = \lambda_3^2 \left[C_{31}^2 + 2C_{31} \langle \phi_1^0(x)\, \phi_3(x) \rangle + C_{32}^2 + 2C_{32} \langle \phi_2^0(x)\, \phi_3(x) \rangle + \langle \phi_3(x) \cdot \phi_3(x) \rangle \right]$$

$$= \lambda_3^2 \left[- C_{31}^2 - C_{32}^2 + \langle \phi_3(x) \cdot \phi_3(x) \rangle \right]$$

$$\Rightarrow \lambda_3$$

PROPONEMOS

$$\phi_4^0(x) = \lambda_4 \left[C_{41}\, \phi_1^0(x) + C_{42}\, \phi_2^0(x) + C_{43}\, \phi_3^0(x) + \phi_4(x) \right]$$

$$C_{41} = -\langle \phi_1^0(x)\ \phi_4(x) \rangle$$

$$C_{42} = -\langle \phi_2^0(x)\ \phi_4(x) \rangle$$

$$C_{43} = -\langle \phi_3^0(x)\ \phi_4(x) \rangle$$

$$\lambda = \left[-C_{41}^2 - C_{42}^2 - C_{43}^2 + \langle \phi_4(x) \cdot \phi_4(x) \rangle \right]$$

ETC. . .

RESULTADO : COEFICIENTES γ_j^k

DE

$$\phi_k^0(x) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^k\, \phi_j(x)$$

TRIANGULAR

COMO

$$C_{\ell i} = -\langle \phi_i^0(x)\ \phi_\ell(x) \rangle =$$

$$= -\sum_{j=1}^{i} \gamma_j^i \langle \phi_j(x)\ \phi_\ell(x) \rangle$$

LOS COEFICIENTES γ_j^k SE OBTIENEN SECUENCIALMENTE UTILIZANDO SOLAMENTE PRODUCTOS ESCALARES DE LAS FUNCIONES DADAS

$$\langle \phi_j(x) \cdot \phi_\ell(x) \rangle$$