

12

INTEGRALES NUMERICAS
DISCRETIZACION DEL
NUCLEO

12-1

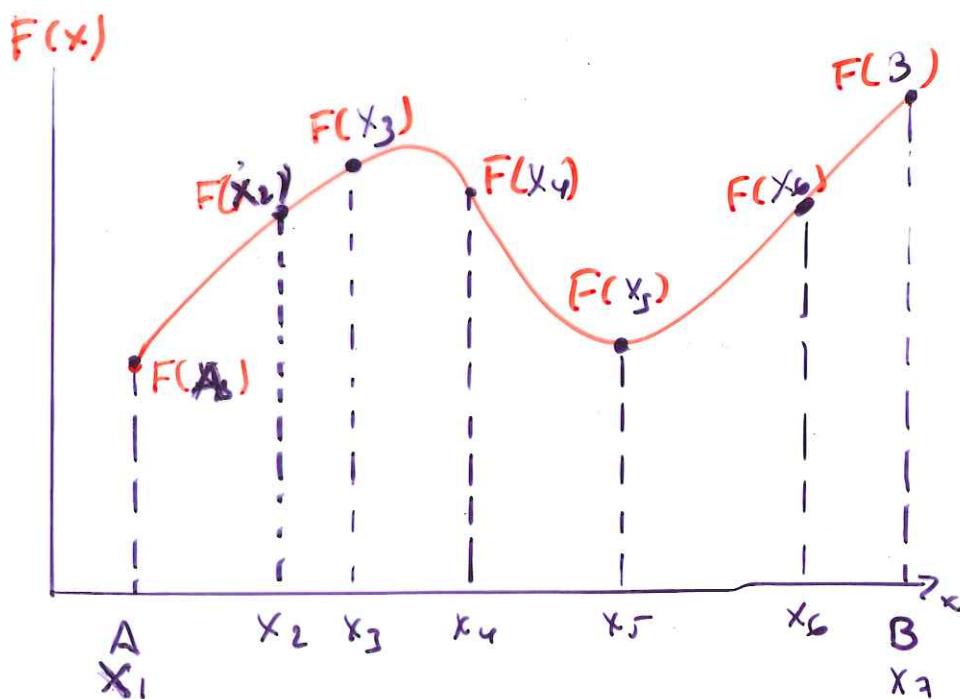
MÉTODOS BASADOS EN
APROXIMACIONES POLINOMIALES

SIMPSON

INTEGRALES NUMÉRICAS

SEA LA INTEGRAL

$$\int_A^B F(x) dx \approx \sum_{j=1}^N W_j F(x_j)$$



DIVERSAS FAMILIAS DEPENDIENDO DEL INTERVALO DE INTEGRACIÓN

QUE SUPONEN DIFERENTES REPRESENTACIONES FUNCIONALES PARA $F(x)$

INTERVALOS:

$(-1 \leq x \leq 1)$ O CUALQUIER INTERVALO FINITO

REPRESENTACIÓN POLINOMIAL

CARACTER POLYNOMIAL INTERVALS REGULARES

CHAPITRE X

FORMULES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DIVERSES

FORMULES D'INTÉGRATION DÉRIVÉES DE LA FORMULE DE NEWTON COTES

Toutes les formules d'intégration que nous allons exposer dans ce paragraphe ne sont que des cas particuliers de celles que nous avons établies au chapitre IX. Nous les exposons néanmoins car elles peuvent être encore employées par quelques auteurs et il est nécessaire de connaître les principes dont elles relèvent.

Ces formules sont basées sur celle de Newton-Cotes qui donne l'intégrale

$$\int_0^x y_x dx$$

au moyen des différences latérales descendantes.

Nous avons établi cette formule au moyen du calcul symbolique. D'ordinaire, on se contente d'intégrer par rapport à x la formule d'interpolation de Newton

$$y_x = y_0 + \frac{x}{1} \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y_0 + \dots$$

ce qui donne la formule de Newton-Cotes

$$\begin{aligned} \int_0^x y_x dx &= xy_0 + \frac{x^2}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\Delta^2 y_0}{2} \\ &+ \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \frac{\Delta^3 y_0}{6} + \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{11}{3} x^3 - 3x^2 \right) \frac{\Delta^4 y_0}{24} \\ &\quad + \left(\frac{x^6}{6} - 2x^5 + \frac{35}{4} x^4 - \frac{50}{3} x^3 + 12x^2 \right) \frac{\Delta^5 y_0}{120} \\ &+ \left(\frac{x^7}{7} - \frac{15}{6} x^6 + 17x^5 - \frac{225}{4} x^4 + \frac{274}{3} x^3 - 60x^2 \right) \frac{\Delta^6 y_0}{720} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

FORMULAS DE INTEGRACION PARA INTERVALOS FINITOS

DISTRIBUCION IRREGULAR DE ORDENADAS DISCRETAS GAUSS

DISTRIBUCIONES REGULARES DE ORDENADAS DISCRETAS

Formule des trapèzes. — Négligeons les différences à partir de $\Delta^2 y_0$ et prenons $n = 1$:

$$\int_0^1 y_x dx = \frac{1}{2} (y_0 + y_1).$$

Appliquée successivement à $(0,1)$, $(1,2)$... $(n-1, n)$, cette formule donne

$$\int_0^n y_x dx = \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n.$$

Formule de Simpson. — Négligeons les différences à partir de $\Delta^3 y_0$ et adoptons $x = 2$:

$$\int_0^2 y_x dx = \frac{1}{3} (y_0 + 4 y_1 + y_2).$$

Appliquée n fois elle donne

$$\int_0^{2n} y_x dx = \frac{1}{3} (y_0 + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + 2 y_4 + 4 y_5 + \dots + 2 y_{2n-2} + 4 y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Formule négligeant Δ^4 , ou seconde formule de Simpson. — Négligeons Δ^4 et adoptons $n = 3$:

$$\int_0^3 y_x dx = \frac{3}{8} (y_0 + 3 y_1 + 3 y_2 + y_3).$$

Formule de Boole ou Villarceau. — Négligeons Δ^5 et adoptons $n = 4$:

$$\int_0^4 y_x dx = \frac{1}{45} (14 y_0 + 64 y_1 + 24 y_2 + 64 y_3 + 14 y_4).$$

Formule négligeant Δ^6 . — Négligeons Δ^6 et adoptons $n = 5$:

$$\int_0^5 y_x dx = \frac{1}{288} (95 y_0 + 375 y_1 + 250 y_2 + 250 y_3 + 375 y_4 + 95 y_5).$$

Formule de Hardy. — Négligeons Δ^8 et posons $n = 6$:

$$\int_0^6 y_x dx = \frac{1}{140} (41 y_0 + 216 y_1 + 27 y_2 + 272 y_3 + 27 y_4 + 216 y_5 + 41 y_6).$$

Le terme en Δ^7 est nul et celui en Δ^8 serait $0,0064 \Delta^8 y_0$, ce qui justifie qu'on néglige cette différence.

Formule de Weedle. — Posons $n = 6$ et négligeons Δ^6 . Remarquons ensuite que

$$\frac{1}{140} \Delta^6 y_0 = \frac{1}{140} (y_0 - 6 y_1 + 15 y_2 - 20 y_3 + 15 y_4 - 6 y_5 + y_6)$$

est négligeable, on l'ajoute à l'intégrale, ce qui donne

$$\int_0^6 y_x dx = \frac{3}{10} (y_0 + 5 y_1 + y_2 + 6 y_3 + y_4 + 5 y_5 + y_6).$$

Formule négligeant Δ^8 . — Posons $n = 7$ dans la formule de Newton Cotes :

$$\int_0^7 y_x dx = \frac{7}{17280} [751 y_0 + 3577 y_1 + 1323 y_2 + 2989 y_3 + 2989 y_4 + 1323 y_5 + 3577 y_6 + 751 y_7].$$

Formule négligeant Δ^9 .

$$\int_0^8 y_x dx = \frac{4}{14175} (989 y_0 + 5888 y_1 - 928 y_2 + 10496 y_3 - 4540 y_4 + 10496 y_5 - 928 y_6 + 5888 y_7 + 989 y_8).$$

Formule négligeant Δ^{10} .

$$\int_0^9 y_x dx = \frac{9}{89600} (2857 y_0 + 15741 y_1 + 1080 y_2 + 19344 y_3 + 5778 y_4 + 5778 y_5 + 19344 y_6 + 1080 y_7 + 15741 y_8 + 2857 y_9).$$

Formule négligeant Δ^{11} .

$$\int_0^{10} y_x dx = \frac{5}{299376} (16067 y_0 + 106300 y_1 - 48525 y_2 + 272400 y_3 - 260550 y_4 + 427368 y_5 - 260550 y_6 + 272400 y_7 - 48525 y_8 + 106300 y_9 + 16067 y_{10}).$$

Formule de Durand. — Elle s'obtient par combinaison de la formule des trapèzes et de celle de Simpson :

$$\int_0^n y_x dx = \frac{5}{12} (y_0 + y_n) + \frac{13}{12} (y_1 + y_{n-1}) + (y_2 + y_3 + \dots + y_{n-2}).$$

Formule de Lacroix.

$$\int_0^n y_x dx = \frac{3}{8} (y_0 + y_n) + \frac{7}{6} (y_1 + y_{n-1}) + \frac{23}{24} (y_2 + y_{n-2}) + (y_3 + y_4 + \dots + y_{n-3}).$$

Formule de Shovelton. — On néglige Δ^6 et on prend $n = 10$:

$$\int_0^{10} y_x dx = \frac{5}{126} \left[8 (y_0 + y_{10}) + 35 (y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + y_5 + 15 (y_2 + y_4 + y_6 + y_8) \right].$$

Formule de Steffensen. — Cette formule a l'avantage de donner l'expression de

$$\int_0^n y_x dx$$

sans faire intervenir y_0 ni y_n , valeurs aux extrémités de l'intervalle d'intégration.

Voici la formule pour une succession de valeurs de n :

$$\int_0^2 = 2 y_1 \quad \int_0^3 = \frac{3}{2} (y_1 + y_2) \quad \int_0^4 = \frac{4}{3} (2y_1 - y_2 + 2y_3)$$

$$\int_0^5 = \frac{5}{24} (11 y_1 + y_2 + y_3 + 11 y_4)$$

$$\int_0^6 = \frac{3}{10} (11 y_1 - 14 y_2 + 26 y_3 - 14 y_4 + 11 y_5)$$

$$\int_0^7 = \frac{7}{1440} (611 y_1 - 453 y_2 + 562 y_3 + 562 y_4 - 453 y_5 + 611 y_6)$$

$$\int_0^8 = \frac{8}{945} (460 y_1 - 954 y_2 + 2196 y_3 - 2459 y_4 + 2196 y_5 - 954 y_6 + 460 y_7)$$

$$\int_0^9 = \frac{9}{4480} (1787 y_1 - 2803 y_2 + 4967 y_3 - 1711 y_4 - 1711 y_5 + 4967 y_6 - 2803 y_7 + 1787 y_8)$$

$$\int_0^{10} = \frac{5}{4536} (4045 y_1 - 11690 y_2 + 33340 y_3 - 55070 y_4 + 67822 y_5 - 55070 y_6 + 33340 y_7 - 11690 y_8 + 4045 y_9).$$

On utilisera une de ces formules lorsque l'on ne peut pas calculer y aux extrémités de la table.

INTERVALO $(0 \leq x < \infty)$

REPRESENTACIÓN e^{-x} Polinomio (x)
LAGUERRE

INTERVALO $(-\infty \leq x \leq \infty)$

REPRESENTACIÓN e^{-x^2} Polinomio (x)
HERMITE

GENERALMENTE EN LOS DOS ÚLTIMOS
CASOS EL CONJUNTO DE PUNTOS x_j
ELEGIDOS PARA LA INTEGRACIÓN
NUMÉRICA NO PRESENTA UN ESPACIADO
REGULAR

EN EL PRIMER CASO $(-1 \leq x \leq 1)$ LAS
DIFERENTES FORMULAS DE INTEGRACIÓN
NUMÉRICA, PUEDEN O NO, TENER
INTERVALOS Δx REGULARES.

EL CONJUNTO DE PESOS $w(x_j)$
ASOCIADOS, PUEDE O NO, TAMBIEN
SER REGULAR.

CON UNA LIGERA EXPERIENCIA
SE PUEDEN HACER BUENAS
INTEGRALES NUMÉRICAS

EN ESTOS DOS ULTIMOS CASOS

$0 \leq x < \infty$ e^{-x} Polinomio (x)

$-\infty < x < \infty$ e^{-x^2} Polinomio (x)

EXISTE EL CUADRO TEORICO
QUE PROPORCIONA PARA DIFERENTES
ORDENES DE APROXIMACION LOS
VALORES DE LAS "ORDENADAS
DISCRETAS" x_k Y DE LOS
"PESOS DE INTEGRACION" w_k
CORRESPONDIENTES QUE OPTIMIZAN
EL CALCULO NUMERICO DE LAS
INTEGRALES

LAGUERRE, HERMITE

PERO SI SE NOS PRESENTAN LOS CASOS

$$0 \leq x < \infty \quad e^{-\lambda x} \text{ Polinomio}(x)$$

$$-\infty < x < \infty \quad e^{-\lambda x^2} \text{ Polinomio}(x)$$

PARA PODER APLICAR LA TEORÍA ANTERIOR (LAGUERRE, HERMITE)

HAREMOS EL CAMBIO DE VARIABLES

$$\lambda x \rightarrow y \quad \sqrt{\lambda} x \rightarrow y$$

RESPECTIVAMENTE

$$\text{Polinomio}(\lambda x) \rightarrow \text{Polinomio}(x)$$

TENDREMOS PUES LOS VALORES DE LAS ORDENADAS DISCRETAS y_k Y DE LOS PESOS w_k

EL PROBLEMA APARECE CUANDO HAY QUE INTEGRAR

CON LA MISMA DISTRIBUCIÓN DE ORDENADAS DISCRETAS y_k

VARIAS FUNCIONES CON DIFERENTES λ

TENDREMOS QUE RECURRIR A OTROS PROCEDIMIENTOS (ALGO PARECIDO A LA INTEGRACIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES: TRAPÉCIDOS)

12.2

DISCRETIZACIÓN DEL
NUCLEO DE ACUERDO
CON LOS ANTERIORES
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

DISCRETIZACIÓN MATRICIAL DIRECTA

$$\int_a^b K(x, y) f(x) dx = g(y)$$

PARA CADA $y_k =$

$$\int_a^b K(x, y_k) f(x) dx = g(y_k)$$

ADMITIENDO UNA FORMULA DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA PARA LA INTEGRAL SOBRE

$$\sum_j W_j K(x_j, y_k) f(x_j) = g(y_k)$$

TOMANDO TANTOS VALORES DE y_k Y DE $g(y_k)$ COMO SE HAN ELEGIDO PARA LA INTEGRAL SOBRE x ; EN TÉRMINOS DE ORDENADAS DISCRETAS x_j (UN NÚMERO MAYOR PARA y_k PUDIERA SER MÁS CONVIENTE AUN -MÍNIMOS CUADRADOS- PERO CUIDADO NO REPETIR ECUACIONES)

TENDREMOS UN SISTEMA LINEAL DE CUYA INVERSIÓN SE DEDUCIRÁ EL CONJUNTO DE VALORES $f(x_j)$

5.16. Quadrature methods and expansion methods

Let us investigate briefly how a quadrature method may be set up for an equation of the first kind. We shall then indicate the *potentially* unsatisfactory nature of the method. Modifications of the method, intended to alleviate some of its shortcomings, will be discussed later.

From eqn (5.104) we have, on replacing the integral by a rule with weights w_j and abscissae y_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$), the approximation

$$\sum_{j=0}^n w_j K(x, y_j) f(y_j) = g(x) .$$

If we write

$$\sum_{j=0}^n w_j K(x, y_j) \tilde{f}(y_j) = g(x) \tag{5.107}$$

and seek values of $\tilde{f}(y_j)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) satisfying (5.107), we shall not in general find a solution. A solution exists only if $g(x)$ is a linear combination of the functions $K(x, y_j)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) and, even if the integral equation has a solution, this is not guaranteed. However, if we select z_0, z_1, \dots, z_m we may be able to satisfy the equations

$$\sum_{j=0}^n w_j K(z_i, y_j) \tilde{f}(y_j) = g(z_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m) . \tag{5.108}$$

We shall suppose that $m = n$, until further notice, and these equations then define $\tilde{f}(y_0), \dots, \tilde{f}(y_n)$ provided $\det [K(z_i, y_j)] \neq 0$ (in particular, if the functions $K(x, y_j)$ form a Haar set). There is no necessity in these equations to choose $z_i = y_i$, though it may be thought natural to do so. We shall demonstrate by examples that eqns (5.108) do not lead to a generally reliable method of approximating the values of a solution of the integral equation. We shall proceed under the general assumption that $K(x, y)$ and $g(x)$ are continuous.

Encuentra problemas pero no sabe muy bien la razón.

1.2 - 3

METODO BASADO
EN LA INTEGRAL
DE UN PRODUCTO
DE FUNCIONES

EL MÉTODO CONSISTE EN ADMITIR UN MODELO MATEMÁTICO PARA REPRESENTAR $f(x)$, CON TANTOS PARÁMETROS LIBRES COMO DESEEMOS PARA OBTENER UN GRADO DE APROXIMACIÓN REQUERIDO.

LUEGO RESOLVEREMOS PARA OBTENER, COMO INCOGNITA, LOS VALORES DE ESOS PARÁMETROS LIBRES.

- EN LOS CASOS QUE ACABAMOS DE VER, ESOS PARÁMETROS LIBRES, SON
- LOS VALORES MEDIOS DE $f(x)$ DENTRO DE CADA ELEMENTO (CAJA) DE UN HISTOGRAMA REPRESENTATIVO
 - LOS VALORES DE $f(x)$ EN LOS VERTICES DE UNA POLIGONAL REPRESENTATIVA.

PERO NO ES NECESARIO QUE
ESOS PARAMETROS LIBRES QUE
TENDREMOS QUE CALCULAR SEAN
VALORES PARTICULARES $f(x_5)$ DE $f(x)$.

NATURALMENTE, PARA QUE ESTA RESOLUCIÓN SEA CÓMODA, ESTOS PARÁMETROS LIBRES DEBERÁN DE INTERVENIR DE UNA FORMA LINEAL.

GENERALMENTE SE SUELE ADMITIR

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^N c_j P_j(x)$$

DONDE EL CONJUNTO $\{P_j(x)\}$ ESTARÁ FORMADO POR UNAS FUNCIONES TALES QUE LA SUMA ANTERIOR PUEDA RESPONDER AL $f(x)$ ESPERADO, SI LOS COEFICIENTES SE CALCULAN BIEN

EN CIERTO MODO SUPONE CONOCER ALGO DEL PROBLEMA QUE PRETENDEMOS RESOLVER.

ENTONCES

$$\begin{aligned} g(\eta) &= \int_A^B K(\eta, x) f(x) dx \quad \text{SERÁ} \approx \\ &= \sum_j c_j \int_A^B K(\eta, x) P_j(x) dx \end{aligned}$$

ESTA ÚLTIMA INTEGRAL

$$X_j(\eta) \equiv \int_A^B K(\eta, x) P_j(x) dx$$

PUEDE HACERSE, BIEN ANALITICAMENTE,
BIEN NUMERICAMENTE CON GRAN
PRECISION: ES UNA INTEGRAL
EXPLICITA Y LAS FUNCIONES $P_j(x)$
SUELEN SER SIMPLES (Véanse
ejemplos)

ASI, ADMITIENDO

$$g(y) = \sum_{j=1}^N c_j P_j(y)$$

DANDO VALORES A Y TANTOS
O MAS QUE LOS N VALORES DE
 c_j , SE DEDUCIRA UN SISTEMA
PARA OBTENER ESTOS.

ES MUY IMPORTANTE QUE
EL CALCULO DE ESTOS
COEFICIENTES SEA
CÓMODO

PRIMER MODELO: HISTOGRAMA

LA MANERA MÁS CÓMODA PARA EXPRESAR $f(x)$ EN FUNCIÓN DE UNAS FUNCIONES ELEMENTALES $P_j(x)$, ES ELEGIR ESTAS TALES QUE

$$P_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \bar{x}_{j-1} \\ 1 & \text{si } \bar{x}_{j-1} \leq x \leq \bar{x}_j \\ 0 & \text{si } x > \bar{x}_j \end{cases}$$

UN ELEMENTO DE HISTOGRAMA ENTRE \bar{x}_{j-1} Y \bar{x}_j Y DE ALTURA UNIDAD

UNA SERIE DE ESTAS FUNCIONES CUBRIENDO TODO EL INTERVALO (a, b) PERMITEN EL DESARROLLO

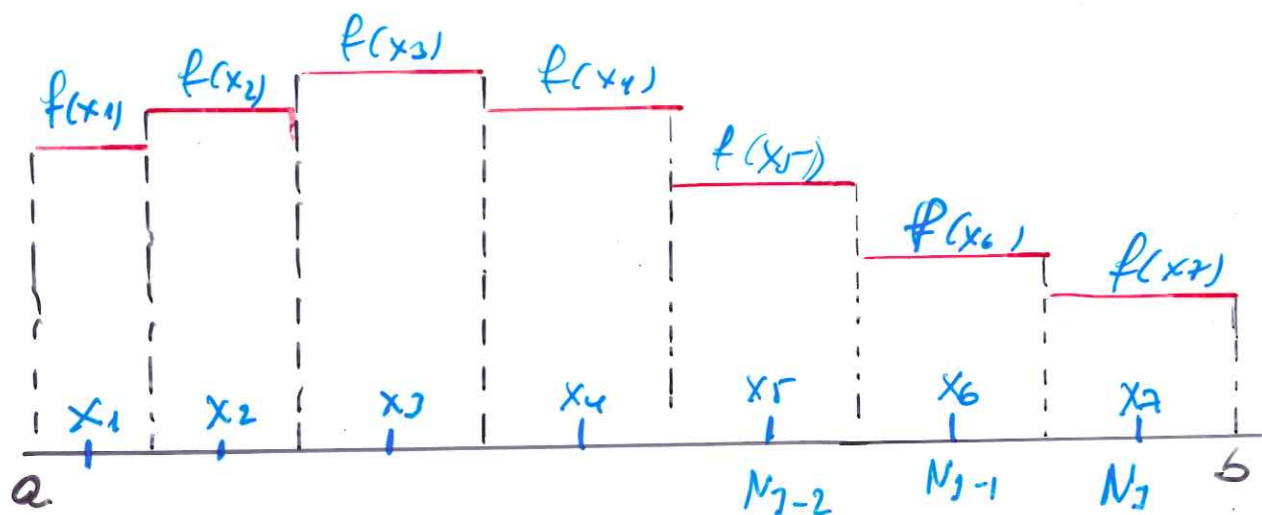
$$f(x) = \sum C_j P_j(x)$$

DONDE LOS COEFICIENTES C_j SON
LOS VALORES DE LOS ELEMENTOS
DEL HISTOGRAMA $f(x_j)$

ES OTRA FORMA DE DECIR LO MISMO PERO GENERALIZABLE

PRIMER MODELO PARA REPRESENTAR $f(x)$

HISTOGRAMA: CON DIVISIONES, "CAJAS"
REGULARES O NO



LAS "ORDENADAS DISCRETAS" $\{x_j\}$
ELEGIDAS PARA REPRESENTAR $f(x)$
SON LOS PUNTOS MEDIOS DE CADA
"CAJA" DEL HISTOGRAMA.

SI EL INTERVALO DE INTEGRACION
SE EXTIENDE A $a \rightarrow -\infty$ O $b \rightarrow \infty$,
LAS "CAJAS" PUEDEN IR ENSRAN-
CHÁNDOSE EN LOS EXTREMOS.

LOS LÍMITES DE CADA CAJA SON

CAJA 1 $\bar{x}_0 = a$ $\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

CAJA J $J = 2, 3, \dots, N_J - 1$
 $\bar{x}_{j-1} = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}$, $\bar{x}_j = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$

CAJA N_J $\bar{x}_{N_J-1} = \frac{x_{N_J} + x_{N_J+1}}{2}$, $\bar{x}_{N_J} = b$

ENTONCES, PARA CADA y_k

$$g(y_k) = \int_a^b K(x, y_k) f(x) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_j} \int_{\bar{x}_{j-1}}^{\bar{x}_j} K(x, y_k) f(x) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_j} \underline{f(x_j)} \int_{\bar{x}_{j-1}}^{\bar{x}_j} K(x, y_k) dx$$

$$= \sum_{j=1}^{N_j} W(k, j) f(x_j)$$

$$W(k, j) \equiv \int_{\bar{x}_{j-1}}^{\bar{x}_j} K(x, y_k) dx$$

TENEMOS PUES UNA MATRIZ $W(k, j)$ QUE RELACIONA LAS N_k MEDIDAS DE $g(y_k)$ EN LOS PUNTOS y_k CON LOS N_j RESULTADOS: VALORES DE $f(x_j)$ EN LOS PUNTOS x_j

SI $N_k > N_j$ MINIMOS CUADRADOS

LAS INTEGRALES

$$W(k, j) = \int_{\bar{x}_{j-1}}^{\bar{x}_j} K(x, y_k) dx$$

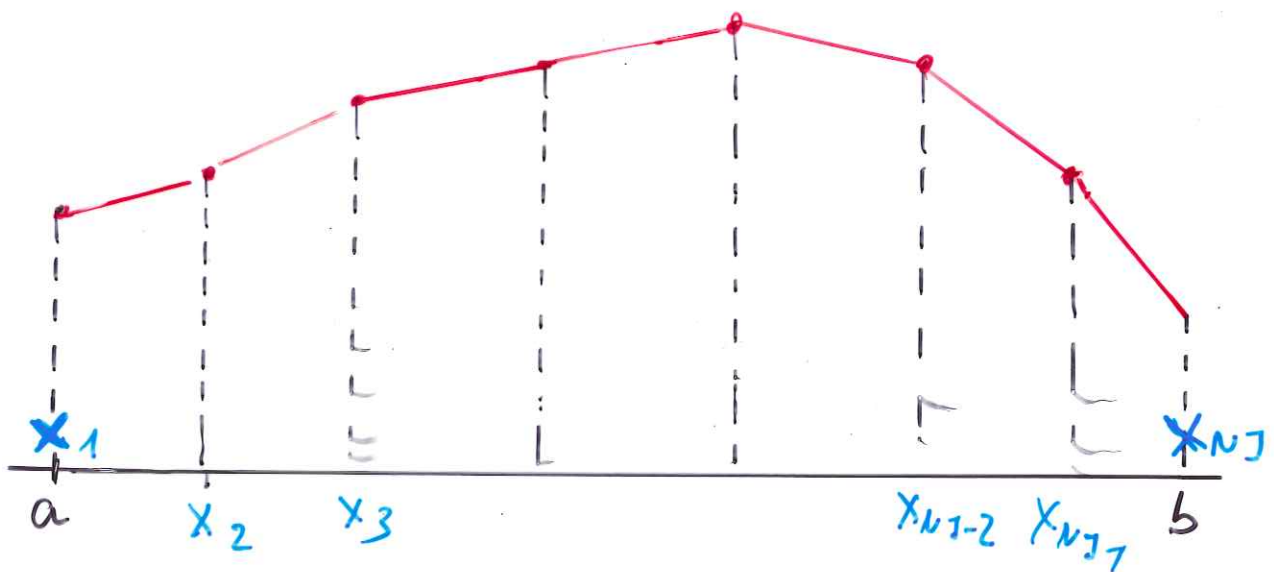
COMO SON INTEGRALES EXPLICITAS
PUEDEN HACERSE

- BIEN ANALITICAMENTE, SI ES POSIBLE
- BIEN NUMERICAMENTE CON LA PRECISION QUE QUERAMOS

2º MODELO PARA REPRESENTAR $f(x)$

POLIGONAL

EL CONJUNTO DE ORDENADAS DISCRETAS x_j PARA REPRESENTAR $f(x)$ SON LOS VERTICES DE ESTA POLIGONAL:



SE ASEGURA LA CONTINUIDAD DE LA FUNCION $f(x)$ EN ESOS PUNTOS x_j AUNQUE NO LA DE SU DERIVADA

SUELE SER MAS QUE SUFICIENTE

ENTONCES:

$$g(y_k) = \int_a^b k(x, y_k) f(x) dx = \sum_{j=1}^{N_j-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x, y_k) f(x) dx$$

EN CADA UNA DE ESAS INTEGRALES

$x_{j-1} \leq x_j \leq x_j$, $f(x)$ ES UN SEGMENTO DE RECTA DEFINIDO POR LOS VALORES $f(x_{j-1})$ Y $f(x_j)$ DE $f(x)$ EN LOS EXTREMOS DE CADA INTERVALO

$$\underline{f(x)} = f(x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} (x - x_{j-1})$$

$$= \underline{A_j + B_j x} \quad \text{CON}$$

$$A_j = \frac{f(x_{j-1})x_j - f(x_j)x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

$$B_j = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}$$

ENTONCES

$$g(y_k) = \sum_{j=1}^{N_j-1} \left\{ A_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x, y_k) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x, y_k) x dx \right\}$$

LAS INTEGRALES DE LOS NUCLEOS SON TRIVIALES TEORICA O NUMERICAMENTE

Y COMO ERA

$$A_j = \frac{x_j}{x_j - x_{j-1}} f(x_{j-1}) - \frac{x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} f(x_j)$$

$$B_j = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} f(x_j) - \frac{1}{x_j - x_{j-1}} f(x_{j-1})$$

RE CONSTITUIMOS FACILMENTE LA
MATRIZ $W(K, J)$ DEL SISTEMA DE
ECUACIONES ALGEBRAICAS

$$g(y_{10}) = \sum_{j=1}^{N_j} W(K, J) f(x_j)$$

QUE NOS PERMITE MEDIANTE
UNA INVERSIÓN EL OBTENER
LOS VALORES $f(x_j)$ DE LA
FUNCIÓN $f(x)$ EN EL CONJUNTO
DE "ORDENADAS DISCRETAS" ELEGIDO
 $\{x_j\}$.

2° MODELO POLIGONAL

UNA MANERA CÓNCOMA PARA SISTEMATIZAR
- Y GENERALIZAR - EL DESARROLLO
ANTERIOR, CONSISTE EN TOMAR PARA
EL DESARROLLO

$$f(x) = \sum_{j=1}^N C_j P_j(x)$$

LAS FUNCIONES

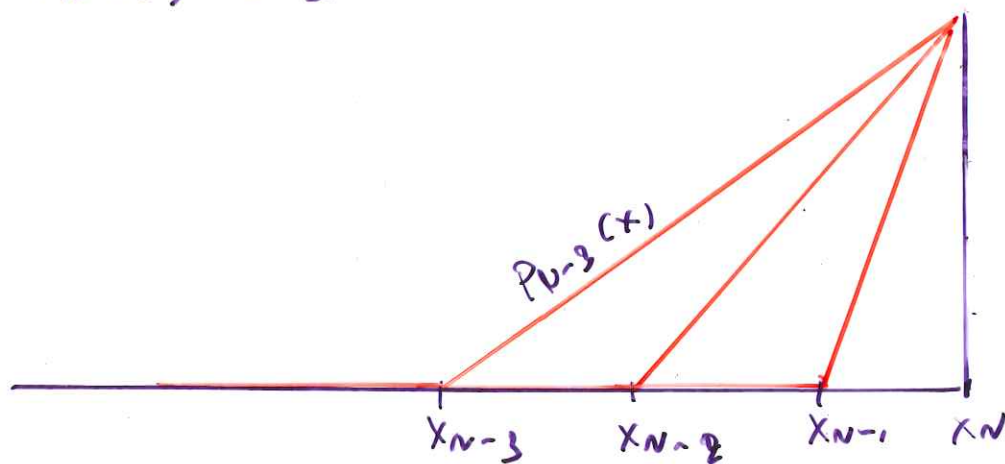
PARA $j = 1, 2, \dots, N-1$

$$P_j(x) = \frac{x - x_j}{x_N - x_j} \quad \text{Si } x \geq x_j$$

$$P_j(x) = 0 \quad \text{Si } x \leq x_j$$

PARA $j = N$

$$P_N(x) = 1$$



ENTONCES

$$g(y) = \int_{A=x_1}^{B=x_N} K(y, x) f(x) dx = \sum_{j=1}^N C_j \int_{x_j}^{x_N} K(y, x) \frac{x - x_j}{x_N - x_j} dx$$
$$= \sum_{j=1}^N C_j \varphi_j(y)$$

DANDO VALORES A y , TANTOS O MAS QUE LOS DE $\{x_j\}$, SE DEDUCEN LOS COEFICIENTES C_j Y CON ELLO SE RECONSTITUYE $f(x)$,

RELACION ENTRE $f(x_j)$ Y C_j

$$f(x_1) = C_N$$

$$f(x_2) = C_N + C_1 \frac{x_2 - x_1}{x_N - x_1}$$

$$f(x_3) = C_N + C_1 \frac{x_3 - x_1}{x_N - x_1} + C_2 \frac{x_3 - x_2}{x_N - x_2}$$

$$f(x_{N-1}) = C_N + \sum_{k=1}^{N-2} C_k \frac{x_{N-1} - x_k}{x_N - x_k}$$

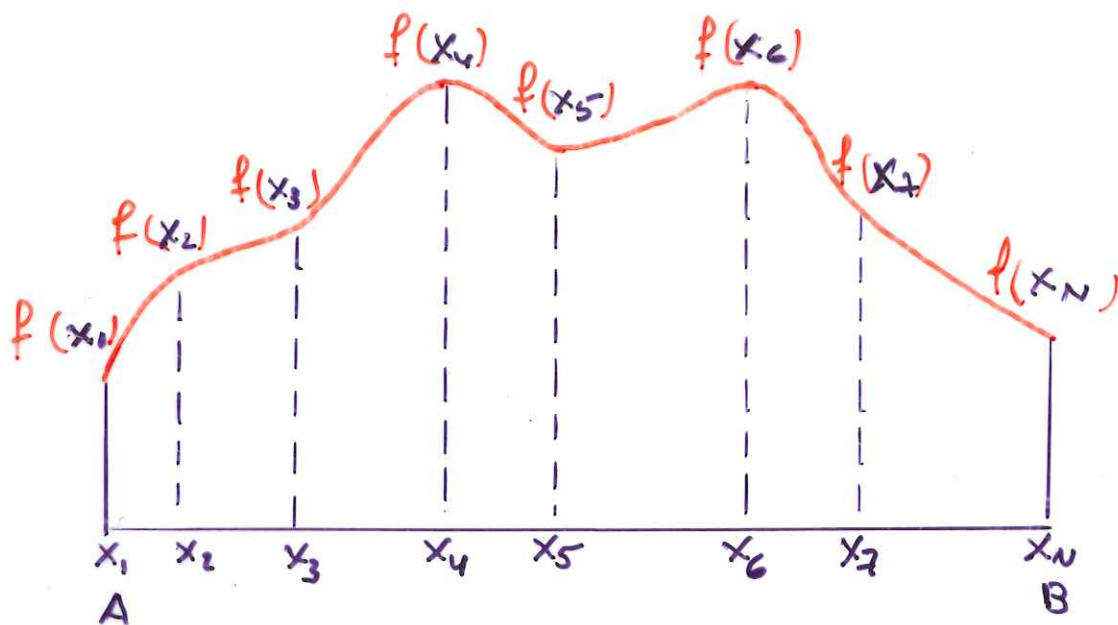
$$f(x_N) = C_N + \sum_{k=1}^{N-1} C_k \frac{x_N - x_k}{x_N - x_k} = \sum_{k=1}^N C_k$$

Si deya conocidos los C_j obtenemos los $f(x_k)$ facilmente.

PERO PODREMOS TRABAJAR DIRECTAMENTE CON LOS C_j

3^{er} MODELO PARA $f(x)$

$$f(x) = \sum_{e=1}^{N-1} c_e P_e(x)$$



LA REPRESENTACIÓN DE $f(x)$ SE HACE MEDIANTE ARCOS DE PARABOLA NOS PERMITE ASEGURAR LA CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN Y DE SU 1^{er} DERIVADA

UNA FORMA COMODA DE ELEGIR $P_j(x)$ PARA $j=1, 2, 3, \dots, N-1$

$$P_j(x) = \left(\frac{x - x_j}{x_N - x_j} \right)^2 \quad \text{si } x \geq x_j$$

$$P_j(x) = 0 \quad \text{si } x \leq x_j$$

PARA $j=N$

$$P_j(x) = 1$$

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES C_e Y LOS VALORES $f(x_i)$

ESTA RELACIÓN NO ES NECESARIA PUES SE PUEDE TRABAJAR - Y CALCULAR - DIRECTAMENTE CON LOS COEFICIENTES C_e

$$f(x_1) = C_N$$

$$f(x_2) = C_N + C_1 \frac{x_2 - x_1}{x_N - x_1}$$

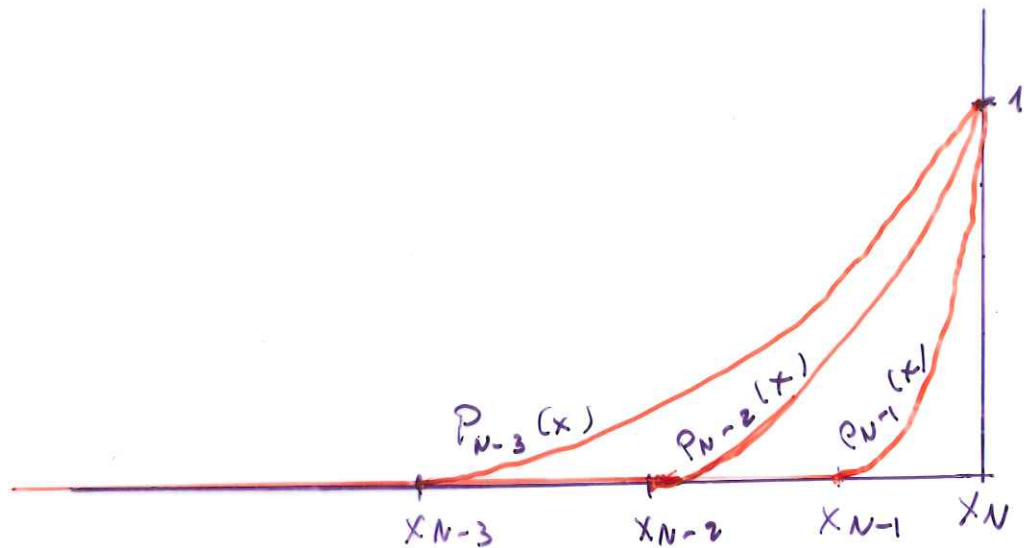
$$f(x_3) = C_N + C_1 \frac{x_3 - x_1}{x_N - x_1} + C_2 \frac{x_3 - x_2}{x_N - x_2}$$

$$f(x_4) = C_N + C_1 \frac{x_4 - x_1}{x_N - x_1} + C_2 \frac{x_4 - x_2}{x_N - x_2} + C_3 \frac{x_4 - x_3}{x_N - x_3}$$

=

$$f(x_N) = C_N + \sum_{j=1}^{N-1} C_j \frac{x_N - x_j}{x_N - x_j} = \sum_{j=1}^N C_N$$

CONOCIDOS UNOS ES FACIL CALCULAR - SI FUESE NECESARIO - LOS OTROS PARÁMETROS LIBRES.



ASI, si $f(x) = \sum_{j=1}^N C_j P_j(x)$

$\{C_j\}$ DESCONOCIDAS

SERA

$$g(\eta) = \sum_{j=1}^N C_j X_j(\eta)$$

$$X_j(\eta) \equiv \int_{A \equiv x_1}^{B \equiv x_N} k(\eta, x) P_j(x) dx = \int_{x_j}^{x_N} k(\eta, x) \left(\frac{x - x_j}{x_N - x_j} \right)^2 dx$$

$$X_N(\eta) \equiv \int_{A \equiv x_1}^{B \equiv x_N} k(\eta, x) dx$$

DANDO VALORES $N_k \geq N_j$ A η

$$g(\eta_k) = \sum_{j=1}^{N_j} C_j X_j(\eta_k)$$

CALCULAREMOS LOS COEFICIENTES C_j

ESTUDIO A POSTERIORI

- PRODUCT INTEGRATION METHOD: LA REPRESENTACION NUMÉRICA - VÍA ORDENADAS DISCRETAS - DE LA INTEGRAL

$$\int_a^b k(x, y) f(x) dx$$

SE BASA EN UNA REPRESENTACIÓN FUNCIONAL QUE ADMITIMOS PARA $f(x)$

- METODO DE DISCRETIZACIÓN DIRECTA

SE BASA EN UNA REPRESENTACIÓN FUNCIONAL QUE ADMITIMOS PARA k

$$k(x, y) f(x)$$

ADEMÁS, LA MISMA PARA TODO Y

Las dos aproximaciones anteriores son mas que suficientes para resolver la mayoría de los problemas.

Teniendo cuidado de haber elegido los valores de las "ordenadas discretas" γ_k tales que los correspondientes núcleos $K(x, \gamma_k)$ sean lo suficientemente diferentes,

el sistema tendrá en principio solución, ya que las ecuaciones serán lo suficientemente independientes.

No obstante si los valores de los ~~γ_k~~ medidos no tienen nada que ver con el problema, puede que sean ~~incompatibles~~ con el sistema y encontrar una solución explosiva.

UNA VEZ ELEGIDO EL CONJUNTO DE ORDENADAS DISCRETAS $\{\gamma_k\}$: EL MISMO PARA TODAS LAS ECUACIONES,

A PESAR DEL DIFERENTE COMPORTAMIENTO CON x DE LOS DIFERENTES NÚCLEOS

$$K(x, \gamma_k)$$

where

$$A_{ij} \equiv \int_a^b k(x_i, y) \varphi_j(y) dy. \quad (5.7)$$

Provided g_i is prescribed at n or more points the unknown coefficients (f, φ_j) can be calculated to yield an n -term approximation to $f(y)$.

Unfortunately, the expansion method suffers many of the practical drawbacks of the matrix-quadrature inversion: the numerical solution depends strongly on the polynomial system employed as well as on the number of expansion points (n). Despite this, Miller (1974) points out that many ill posed problems have been quite well tackled by expansion methods often without the user being aware of the inherent risks. Again, it is a question of 'optimising the representation' (see §7.3 for application) so that the instability can be kept at bay by taking n small enough while maintaining an adequate representation of the source function.

5.2.3 Product integration methods

A class of methods which, loosely speaking, fall somewhat between matrix quadrature and polynomial expansion techniques, can be derived by writing equation (5.2) in the form

$$\sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} k(x_i, y) f(y) dy = g(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.8)$$

with $y_0 = a$ and $y_n = b$. This system may then be reduced to a matrix equation by assuming a specific variation for $f(y)$ within each sub-interval (y_{j-1}, y_j). Quite simple formulae can generally be derived by choosing the solution to be piecewise constant, or piecewise linear over each partition, equality being enforced at the node points (y_j) in the latter case. Taking the simplest case of a piecewise constant solution yields

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \bar{f}_j = g_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.9)$$

with

$$A_{ij} \equiv \int_{y_{j-1}}^{y_j} k(x_i, y) dy \quad (5.10)$$

and where \bar{f}_j may be identified with the solution value at the midpoint of the interval (y_{j-1}, y_j) in the spirit of the classical midpoint rule (e.g. Atkinson 1978).

The application of a product integration technique to a concrete numerical example (Abel's equation) is given in §5.4. For the moment we remark that there appear no compelling reasons why product integration techniques should be much superior to the previous classical inversion method: (but see Baker 1977, p 902, §§5.4 and 7.4).

where β denotes the beta function. Truncating the development for $f(y)$ after $n = m$ terms leads to a lower triangular, square system that can be readily resolved to yield the unknown expansion coefficients F_j (cf §5.2.2).

The second method of inversion is basically a product integration technique (§5.2.3). We write

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(y)(x_i - y)^{-\alpha} dy \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.51)$$

where $x_0 \equiv 0$. Making the assumption that the partition interval (x_{j-1}, x_j) is small compared with the size scale for variations in f leads to the (first-order) approximate system

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^n \bar{f}_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_i - y)^{-\alpha} dy \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.52)$$

Again a lower triangular matrix system must be solved to yield the unknown source function values \bar{f}_j .

It is important at this stage to emphasise the difference in the above numerical techniques. Considering only the simplest case of square systems ($m = n$), the first method equation (5.49) maintains maximal possible (formal) accuracy, being exact for polynomial source functions of degree $(n - 1)$ or less. The product integration method, on the other hand, is only first-order accurate i.e. it is exact only for piecewise constant source functions. This low accuracy is reflected by the fact that for equation (5.52) to provide a useful approximation the true solution should not vary significantly over the partition interval (x_{j-1}, x_j) . To this extent we might argue that the product integration method requires more *a priori* information on the local variation of the source function.

LUNA PENA!

5.4.3 Data inversions

As a preliminary test we attempt to recover the following (smooth) source function

$$f(y) = y^{1/2} \quad (5.53)$$

from simulated noisy data. The problem was discretised taking linear intervals within the x range $(0, 1)$ and random Gaussian noise of uniform amplitude was superposed on the exact data function $g(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

It should first be mentioned that numerical inversion in the *absence of data noise* apparently presents no great difficulty for either method at least provided $n \leq 20$. The more accurate polynomial technique shows much faster convergence—as would be expected—but there is no evidence of numerical instability, catastrophic magnification of round-off errors and the like for either system. On the basis of noise free data therefore, we