2. 1

CONSIDERACIONES MUY GENERALES SOBRE LOS MODELOS DE SISTEMAS FISICO-NATURALES

REPRESENTAREMOS FORMALMENTE EL MODELO DE UN SISTEMA

POR UN OPERADOR $A(X, Y)$

QUE LLAMAREMOS CORRESPONDENCIA, APLICACIÓN, MAPPING, etc

PROCESO DIRECTO SÍNTESIS

$$A(x,y) \otimes \cancel{f(x)} \longrightarrow y$$

$$A(x,y) \otimes f(x) \longrightarrow g(y)$$

PROCESO INVERSO

$$A(x,y) \, , \; y \rightarrow x$$

$$A(x,y) \, , \; g(y) \rightarrow f(x)$$

EN AMBOS PROCESOS EL OPERADOR $A(x,y)$ DEBE SER CONOCIDO.

ESTUDIAREMOS AQUÍ, MUY SUPERFICIALMENTE COMO SE PLANTEA LA FORMA Y LA ESTRUCTURA DEL MODELO DE UN SISTEMA.

Le terme « modèle » est passé dans le langage courant. La notion de « modèle » admet plusieurs interprétations, il existe une classification des modèles, etc.

Par les vocables « modèle », « description par un modèle », on comprendra une description qui reflète précisément les particularités du processus étudié qui intéressent l'analyste. La fidélité et la qualité de cette description sont définies en premier lieu par la conformité du modèle aux normes imposées à la recherche ainsi que par la concordance des résultats acquis à l'aide du modèle avec ceux obtenus par l'observation du processus réel.

Un modèle a toujours pour fonction de rendre compte de données expérimentales, plus ou moins nombreuses et variées. Rendre compte peut signifier aussi bien décrire qu'expliquer. Nous reviendrons au § 4 sur les différences, plus subtiles et moins claires qu'il peut paraître, qui distinguent ces deux notions. Pour le moment, nous nous contenterons de leur sens intuitif.

PARA NOSOTROS, EL LENGUAJE EN EL QUE DESCRIBIREMOS NUESTROS MODELOS, SERA EL LENGUAJE MATEMATICO, O, MEJOR, EL FISICO-MATEMATICO,

Les modèles décrits avec le langage mathématique seront dits modèles mathématiques. Ce seront les seuls modèles envisagés dans la suite.

Past and future of inverse problems

Pierre C. Sabatier
Laboratoire de Physique Mathématique et Théorique, CNRS-UMR 5825, Université de Montpellier II, 34095 Montpellier Cedex 5, France

(Received 22 October 1999; accepted for publication 28 January 2000)

Inverse problems are those where a set of measured results is analyzed in order to get as much information as possible on a "model" which is proposed to represent a system in the real world. Exact inverse problems are related to most parts of mathematics. Applied inverse problems are the keys to other sciences. Hence the field, which is very wealthy, yields the best example of interdisciplinary research but it has nevertheless a strong individuality. The obtained results and explored directions of the 20th century are sketched in this review, with attempts to predict their evolution. © *2000 American Institute of Physics.* [S0022-2488(00)00106-7]

I. INTRODUCTION

We try to describe natural phenomena as mathematical systems of quantities which are related to each other by "laws of natural sciences." These quantities are functions of the space variable x or others, and are called **parameters**.

The system is a "mathematical model" if giving the parameters enables us to predict the result of any possible measurement, i.e., if there exists a mapping $\mathcal{M}$ from the set $\mathcal{C}$ of all possible parameters into the set $\mathcal{E}$ of all possible measurement results (of a given kind). Giving $\mathcal{M}$ explicitly is called "**the direct problem**." Going back from $\mathcal{E}$ to $\mathcal{C}$ is called "**the inverse problem**." If several models are possible, we assume throughout that they are embedded into one only, where they can be distinguished from each other by "**structural parameters**." With this working assumption, the triplet $\mathcal{E},\mathcal{M},\mathcal{C}$ yields a very general scheme for inverse problems. We also make a distinction throughout the paper between "**exact** inverse problems," where only exact inputs (elements of $\mathcal{E}$) and exact solutions are managed, and "**applied** inverse problems," where uncertainties on inputs, called **data**, are taken into account, and generalized solutions are sought.

Inverse problems appeared with the beginning of physical sciences, but the first clearly defined example was given by Abel[1] for a mechanical problem whose mapping $\mathcal{M}$ is defined (we simplify) from $C(0,a)$ to $C(0,a)(a>0)$ by

$$g(y)=\int_0^y f(z)(y-z)^{-1/2}\,dz \quad (0\leq y\leq a). \tag{1.1}$$

One trivially shows

$$\int_0^x dz\, f(z)=\pi^{-1}\int_0^x g(y)(x-y)^{-1/2}dy\ (0\leq x\leq a). \tag{1.2}$$

The image of $\{\mathcal{C}\}=C(0,a)$ by $\{\mathcal{M}\}$ is not $\{\mathcal{E}\}=C(0,a)$ but the subset $\mathcal{M}(C)$ of functions g such that (1.1) makes sense, i.e., which have a continuous fractional derivative of order $\frac{1}{2}$. The "formula" (1.2) yields f in $\mathcal{C}$ if g is in $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. If not, this exact inverse problem does not have an exact solution. Nevertheless, the formula (1.2) can be used for an approximate management of Abel's inverse problem, and since the formula (1.1), or similar ones, appears in several approximate models [Jeffreys–Wentzel–Kramers–Brillouin (JWKB), rays, etc.], it is not surprising to see

RECHERCHES INTERDISCIPLINAIRES

Collection dirigée par Pierre Delattre

Centre National de la Recherche Scientifique
Commissariat à l'Energie Atomique
Ecole Normale Supérieure
Institut des Hautes Etudes Scientifiques

Actes du Colloque

ÉLABORATION ET JUSTIFICATION DES MODÈLES

Applications en Biologie

Présentés par

P. Delattre et M. Thellier

Tome I

maloine s.a. éditeur

27, rue de l'Ecole-de-Médecine - 75006 Paris

1979

Problems of Computational Mathematics and Mathematical Modelling

Edited by
G. I. MARCHUK,
Mem. USSR Acad. Sc.,
and V. P. DYMNIKOV,
D. Sc. (Phys-Math.)

Translated from the Russian by
Vladimir Shokurov

Advances
in
Science
and
Technology
in
the USSR

Mathematics and
Mechanics Series

First published 1985

Mir Publishers
Moscow

На английском языке

Contents

Aunque la "construcción de MODELOS, de los diferentes sistemas: objetos, fenómenos o procesos físicos y astronómicos, no sea el objeto central del PROBLEMA INVERSO, el hacer ciertas consideraciones sobre la construcción y la estructura de los MODELOS, nos permitirá predecir, imponer, o al menos no pretender encontrar, ciertas propiedades de la solución de un PROBLEMA INVERSO

Por otro lado un análisis, aunque no sea muy profundo sobre el concepto de modelo y sobre el proceso de modelización, nos ayudará mucho a la hora de analizar e incluso de diseñar una metodología para tratar el problema inverso la simplification d'un système et la représentation du processus étudié par un modèle facilement réalisable sur ordinateur est un problème clef de l'analyse des systèmes.

La discipline qui a pour nom « analyse des systèmes » est née des besoins de procéder à des études de caractère interdisciplinaire. La conception de systèmes techniques compliqués, la planification et la gestion de complexes économiques, l'analyse des situations écologiques et nombre d'autres orientations des activités technique, scientifique et économique ont nécessité une organisation des recherches qui rompît avec la tradition : concentration des efforts des scientifiques de diverses branches, unification et concordance de l'information recueillie par des recherches concrètes. Ces recherches interdisciplinaires, appelées parfois recherches complexes ou de systèmes, doivent leur succès pour une grande part aux possibilités de traitement de l'information, à la mise en œuvre de méthodes mathématiques qui ont vu le jour avec les ordinateurs, méthodes qui ont fourni non seulement un instrument, mais aussi un langage éminemment universel.

N. MOÏSSÉEV

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES D'ANALYSE DES SYSTÈMES

Traduit du russe
par Djilali EMBAREK

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

TABLE DES MATIÈRES

T

La construction des modèles est toujours une procédure non formelle qui bien évidemment, dépend fortement de l'analyste. de son expérience. de son talent, qui s'appuie toujours sur un certain matériel expérimental, ce qui nous fait dire que le processus de simulation a une base phénoménologique. Le modèle doit reproduire assez fidèlement le phénomène étudié, mais cela n'est pas tout. Il doit encore être facile à manipuler.

LOS MODELOS DEBEN
SER LO MÁS SIMPLE POSIBLE

Asi;

EXPERTISES ET PROCÉDURES NON FORMELLES

§ 1. Remarques préliminaires

Dans les chapitres précédents nous avons à plusieurs reprises attiré l'attention sur le fait que la résolution des problèmes compliqués nous incitait à recourir à des méthodes non formelles et que les problèmes d'analyse d'un système ou de son projet n'étaient pas tous justiciables d'une position mathématique satisfaisante. L'étude d'un système ou la qualité d'un projet dépendent pour beaucoup de l'habileté de l'analyste à inclure des méthodes mathématiques formelles dans la procédure non formelle d'analyse.

Bien plus, on a souligné que l'une des principales vocations de l'analyse des systèmes était d'apprendre à combiner les méthodes d'analyse mathématiques et les méthodes non formelles, les méthodes rigoureuses d'analyse des modèles formalisés et les expériences ou les devis des experts.

L'intuition de l'analyste est capitale au niveau déjà de l'énoncé du problème qui est basé avant tout sur une analyse complète des données. Il doit non seulement comprendre le problème, mais le formuler dans des termes qui se prêtent à une analyse mathématique.

EXISTENCIA DE MÉTODOS
MATEMATICAMENTE NO FORMALES.
INTUICION DEL ANALISTA

CON ESTE PUNTO APARECE UN

DILEMA IMPORTANTE:

UNA INFORMACIÓN SPLEMENTARÍA PUEDE NO AÑADIR NADA A UN MODELO (CORRESPONDENCIA FORMAL ENTRE PARAMETROS DE LA ESTRUCTURA Y LAS VARIABLES OBSERVADAS), INCLUSO PUEDE SER NEGATIVA (INCORPORACIÓN DE RUIDO SIN INFORMACIÓN APARENTE, O INCOMPATIBILIDAD)

PERO PUEDE AÑADIR MUCHO Y **SOBRE TODO** PUEDE COLABORAR A ESTABILIZAR LOS PROCESOS DE INVERSIÓN DE LAS OBSERVACIONES: ES DECIR LOS PROCESOS QUE PERMITEN ENCONTRAR LOS VALORES DE LOS PARAMETROS

ESTO PUEDE SER MUY IMPORTANTE

PERO EL ANALISTA NO DEBE INTRODUCIR EN EL MODELO **DEMASIADA** INFORMACIÓN

EL ANALISTA DEBE SER SIEMPRE REALISTA, PUES TODA EXIGENCIA SUPERFLUA NO PUEDE MAS QUE PERJUDICAR. AUNQUE ESTA SEA CORRECTA, SI NO ES NECESARIA, NO AÑADE INFORMACIÓN Y PUEDE AÑADIR **RUIDO**: RIESGOS GRAVES

ADEMÁS EXISTE EL RIESGO DE DUPLICAR MATEMATICAMENTE LA INFORMACIÓN:

ES DECIR INTRODUCIR EN LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA DEL MODELO ECUACIONES QUE APARENTEMENTE SON DIFERENTES, PERO QUE REPRESENTAN EL MISMO FENÓMENO FÍSICO: APARECEN AUTOMATICAMENTE INESTABILIDADES.

2.2 MODELOS MATEMATÍCOS

Comme le dit W. Shea « la nature ne répond que dans le langage où on l'interroge » [2]. La première tâche, souvent négligée, est d'expliciter ce langage ; de son contenu, de l'étendue de son champ d'application, et de sa précision, dépendront la signification, la variété, et la finesse des réponses.

M. L. RIGHINI-BONELLI, W. R. SHEA.
"Reason, Experiment and Mysticism in the Scientific Revolution". Science History Publications
Mccmillan Press, London, 1975, p. 15

PARA NOSOTROS, EL LENGUAJE EN EL QUE DESCRIBIREMOS NUESTROS MODELOS, SERA EL LENGUAJE MATEMATICO, O, MEJOR, EL FISICO-MATEMATICO.

Les modèles décrits avec le langage mathématique seront dits modèles mathématiques. Ce seront les seuls modèles envisagés dans la suite.

Construction du modèle,

c'est-à-dire

formalisation du processus
ou du phénomène étudié.

Cette formalisation consiste à décrire le pro cessus en termes mathématiques.

L'étude d'un modèle mathématique est toujours liée à une « algèbre », c'est-à-dire à des règles d'opérations sur les objets étudiés qui reflètent les relations entre les causes et les effets. Si cette algèbre est suffisamment développée, on dit qu'a été créée une théorie dans le cadre de ce modèle. Certains faits de théorie — les assertions, les théorèmes — sont parfois appelés lois (deuxième loi de Newton, loi de Stokes, etc.). Exactement de même, de nombreuses thèsés à caractère phénoménologique, bien vérifiées par l'expérience, sont érigées en lois. C'est pourquoi on dit parfois qu'une théorie (ou un modèle) est fondée sur des lois.

EL ANALISTA NO DEBE SÓLO
COMPRENDER BIEN EL PROBLEMA.
SINO FORMULARLO EN TÉRMINOS
QUE SE PRESTEN AL ANÁLISIS
MATEMÀTICO

COMO YA HEMOS DICHO
NOS OCUPAREMOS NADA MÁS QUE
DE SISTEMAS FÍSICOS

REPRESENTADOS POR

MODELOS MATEMÁTICOS

ES DECIR FORMADOS POR ECUACIONES
MATEMÁTICAS QUE RELACIONAN
LOS PARAMETROS DE ESTADO: x, $f(x)$
CON LAS VARIABLES OBSERVADAS, y, $g(y)$

ESTA DESCRIPCIÓN MATEMATICA
ES CONSECUENCIA DE "LA FÍSICA
PARTICULAR" DE CADA SISTEMA:
OBJETO
FENOMENO FÍSICO
PROCESO FÍSICO
etc.
A CUYO ESTUDIO NOS ENFRENTAMOS.

EL ESTUDIO DE LAS HIPÓTESIS
-MAS O MENOS PLAUSIBLES— QUE
INTERVIENEN EN LA CONSTRUCCIÓN
DE UN MODELO,
CORRESPONDE A LA ESTRUCTURA
PROFESIONAL DE CADA CAMPO
CIENTÍFICO.

HAY QUE CONOCER MUY BIEN
EL PROBLEMA PLANTEADO
BAJO EL PUNTO DE VISTA
FISICO-MATEMÁTICO

Il est difficile aux ingénieurs et physiciens expérimentateurs d'imaginer qu'un problème de mesures puisse être intrinsèquement mal posé, c'est-à-dire que le processus de mesure peut être incapable de donner avec précision le paramètre recherché à la limite idéale d'un nombre "extrêmement grand" de mesures. Il leur est plus difficile encore d'énoncer et de trier les "hypothèses a priori" par lesquelles ils restreignent, généralement de façon tacite, la classe des paramètres acceptables. Et c'est là qu'intervient la deuxième et plus grave difficulté. Car la justification des critères de tri ne peut être que d'ordre physique, et l'énoncé de ces critères doit être mathématiquement très propre. De même le choix des questions à poser (pour remplacer la question mal posée : donner la solution), ne peut être justifié que par une connaissance approfondie de la physique du problème, tandis que leur forme est nécessairement reliée à une analyse mathématique fine du problème, et la réponse donnée est en général un travail classique d'analyse numérique et de programmation. Ce type d'étude est donc en fin de compte une branche de la physique mathématique, où l'analyse et les motivations sont d'ordre physique, les outils, mathématiques, plutôt qu'un développement de la mathématique appliquée. Mais c'est une branche de la physique mathématique qui naît à peine.

La complexité d'un problème ne permet pas souvent de se limiter à une étude purement mathématique et pour mener l'opération à son terme on doit faire appel à divers procédés euristiques.

La théorie moderne de systèmes s'est dotée d'un riche appareil composé de méthodes mathématiques élaborées et de puissants systèmes de calcul. Et pourtant si retentissants que soient les succès remportés par cette théorie à l'aide des toutes dernières méthodes fondées sur une description formelle des situations, l'analyse traditionnelle qui fait jouer l'expérience, l'intuition et les capacités de l'homme à associer et à percevoir les choses extra-mathématiques hors de portée encore de l'intellect artificiel, reste nécessaire et parfois même est décisive. Aussi les méthodes de l'analyse des systèmes doivent-elles obligatoirement contenir une description des procédures non formelles utilisées, faute de quoi tout jugement sur l'analyse des systèmes sera non seulement incomplet, mais tout simplement faussé.

SYSTÈME ≡ MODELO

NECESIDAD DE UN ANALISIS TRADICIONAL EN EL QUE INTERVIENE LA EXPERIENCIA, LA INTUICIÓN Y LA CAPACIDÁD HUMANA PARA ASOCIAR Y PERCIBIR PROPIEDADES EXTRA-MATEMATÍCAS, TODAVÍA FUERA DEL ALCANCE DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL

EN PRINCIPIO HAY MATEMATICOS TALES QUE

PUESTO QUE LOS MODELOS SON MATEMÁTICOS, ES DECIR EXPRESADOS EN FORMA DE ECUACIONES MATEMÁTICAS

NO ADMITEN TRABAJAR CON APROXIMACIONES PARA DESCRIBIR EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES PARAMETROS DE ESTADO ~~A~~ f(x) NI PARA DESCRIBIR EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES VARIABLES OBSERVADAS g(y)

PARA ELLOS LOS DATOS g(y) HAN DE SER MATEMATICAMENTE EXACTOS Y DEBEN ENCONTRAR LAS FUNCIONES f(x), TAMBIÉN MATEMATICAMENTE EXACTAS A PARTIR DE PROCESOS DE INVERSION ANALITICA (MATEMATICAMENTE EXACTA)

II Fitting procedures and mathematical Inversion Theory.

Physicists usually begin their study of an inverse problem by seeking an inverse mapping from a subset G' of G to a subset F' of F. For example they may define F' by a few parameters, which are then obtained from data by trial and error. This is the basis of most so called fitting procedures (also called in some cases numerical inversion techniques !). In most cases, the choice of F' and its scarce parametrization, is an example of misuse of Physics. Indeed, the a priori assumptions which are implied by this choice are either hidden behind the method, or are only justified by the sake of convenience, and give room but to a very narrow class of admissible solutions. The same criticism is often valid for "profile inversion methods", which differ from the previous ones only by the closed form of inverse mappings. Besides, in many cases neither F' or G' are defined in F and G so that nobody really knows whether a lack of consistency between the parameters consequently obtained and other informations is meaningful. The deep reason of these failures is that these methods do not consider the Inverse Problem as a whole problem to be studied and solved, but only follow one approach, towards one solution.

As we have already said, Physics is often used for justifying an approximate treatment of the problem equations, and this may be confusing both because the validity bounds of the parameters in F' are not clear cut and because the remaining part of F may contain the most interesting solutions. Hence, we shall discuss only how physics can interfere with a choice among exact methods. The word exact refers to the fact that the inversion methods to be used are, in principle, not approximations.

NO ADMITE CALCULOS APROXIMADOS

Une remarque s'impose à ce propos.

L'un des plus grands mathématiciens russes A. Liapounov estimait qu'il était nécessaire de traiter tout problème physique une fois posé comme un problème de « mathématiques pures », c'est-à-dire de n'utiliser aucun raisonnement à caractère non formel. Ce point de vue est très difficile à appliquer en recherche opérationnelle. En effet, cette discipline fait constamment intervenir des raisonnements non formels. C'est pourquoi la vérification de la qualité d'une solution, sa conformité à l'objectif fixé constituent un très important problème de théorie.

Mais est-il légitime d'envisager le principe d'une combinaison des méthodes mathématiques et des méthodes fondées sur l'intuition et l'expérience ? La question posée a-t-elle un sens ?

En effet, dans les mathématiques traditionnelles, seuls les résultats énoncés sous forme de théorèmes sont indubitables, eux seuls nous semblent crédibles. Les méthodes mathématiques et elles seules permettent d'aboutir à des conclusions irréfutables et non ambiguës. Les procédés d'analyse fondés sur l'intuition et les similitudes ne sont pas caractérisés par la même rigueur des conclusions. Toute proposition non acquise par des méthodes mathématiques peut être mise en doute par le mathématicien qui est toujours en mal de démonstrations. Cela tient de la déformation professionnelle.

Mais cette « déformation » qui occulte l'analyse des données initiales pour s'attacher seulement à celles des conséquences restreint le champ d'activités et les possibilités des mathématiques modernes et des mathématiciens dont le rôle ne cesse de croître dans la vie sociale. Elle éloigne le mathématicien de problèmes dont sans doute lui seul serait en mesure de faciliter l'analyse.

Il existe cependant un autre point de vue sur les objectifs et la teneur des recherches mathématiques. La tendance qui se dessine actuellement peut tenir en une phrase : le mathématicien devient de plus en plus un membre actif de l'analyse de processus biologiques, physiques, économiques, etc. On assiste en quelque sorte à un retour à l'époque de la Renaissance où chaque grand mathématicien était encore un philosophe, un naturaliste. Mais ce retour s'opère au stade actuel de nos connaissances sur l'environnement et des possibilités accrues des recherches mathématiques.

LOS MATEMATICOS NO SÓLO DEBEN HACER ANÁLISIS MATEMATICAMENTE RIGUROSOS.

DEBEN COLABORAR EN LA DESCRIPCION (LO MAS MATEMATICAMENTE POSIBLE) DE LOS FENOMENOS NATURALES.

La CRITICA MATEMÁTICA anterior, es más común de lo que parece.

Sin embargo se puede neutralizar fácilmente.

El planteo de un problema en términos FÍSICO-MATEMÁTICOS lleva ya todas las COMPONENTES HEURÍSTICAS que fueron NECESARIAS PARA ESTABLECER esas LEYES FÍSICO-MATEMÁTICAS.

LAS LEYES FÍSICAS, AUNQUE ESTÉN EXPRESADAS EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS, NO NOS LAS HA SUMINISTRADO LA DIVINIDAD

LAS LEYES FÍSICAS SON EL RESULTADO DE:

- OBSERVACIONES - EXPERIMENTACIONES
  - CONOCIMIENTOS PREVIOS
- VERIFICACIONES
  - CONTRA-EXPERIENCIAS
- EXTRAPOLACIONES (CON SUERTE)

ETC

Y CON MUCHA SUERTE

ESTABLECER, COMO SE PUEDA, TODO LO ANTERIOR EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS

TODOS ESTOS PROCESOS LLEVAN INCLUIDA UNA COMPONENTE HEURÍSTICA IMPORTANTE

AUNQUE HOY EN DÍA TODO ESTE PROCESO SE SUSTITUYA POR EL CONSENSO)

Still now, many studies of inverse problems would be greatly improved if a systematic use of Inversion Theory was made. However, this use would not be sufficient. In the last few years, we found more and more obvious that a study using only the mathematical schemes of Inversion Theory is not satisfactory. In a complete study of an inverse problem, Physics must be present in each method, in each choice, so as to justify the strategy which is used in the study.

YA QUE ESTA FÍSICA SE UTILIZÓ
EN LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO
SIMPLE O NO
EXPLICITO O NO

A noter qu'en mathématiques le formel et le non formel se côtoient et il est parfois très difficile de faire la distinction entre la partie euristique de l'analyse qui est fondée sur l'intuition et l'étude de l'environnement, et les constructions mathématiques formelles. En effet, les mathématiques tirent des conclusions rigoureuses à partir des données initiales. Mais ces données — les axiomes — découlent d'hypothèses paramathématiques. Ces hypothèses résultent d'un raisonnement non formel, d'une extrapolation de l'expérience et des observations. Donc, le formel et le non formel s'imbriquent dans les recherches *). Le modèle mathématique est le fruit d'un raisonnement non formel; toute l'information concernant la nature du processus étudié y est codée. On construit ensuite une algèbre, c'est-à-dire un système de procédures dont l'algorithme permet de décoder l'information logée dans le modèle. Donc, l'une des tâches des mathématiques est de décoder l'information contenue dans le modèle, de construire une séquence d'opérations logiques que la manière non formelle de raisonnement, qui est traditionnelle pour les sciences naturelles, est incapable de faire **).

Mais si les méthodes formelles et non formelles d'analyse s'imbriquent si étroitement, il semble tout à fait naturel de ne pas les désagréger et de les considérer comme les éléments d'un processus unique de recherche.

RAZONAMIENTO NO FORMAL EN EL MOMENTO DE TRATAR EL PROBLEMA INVERSO,

La description mathématique, c'est-à-dire la construction d'un modèle mathématique, n'est pas un processus univoque. S'il est vrai que le modèle est objectif, l'activité de l'analyste fait jouer d'innombrables facteurs subjectifs: minutie de la description du processus, choix du langage de simulation, etc. La construction d'un modèle mathématique s'appuie sur un système d'hypothèses qui reflètent la vision de l'analyste.

EN CUALQUIER CASO

EN EL CAMPO DE LA ASTRONOMÍA

PODEMOS CONSTRUIR NUESTROS **MODELOS** (LOS **MODELOS** DE LOS OBJETOS, FENOMENOS, PROCESOS, etc) **DIRECTAMENTE** A PARTIR DE LAS LEYES DE LA FÍSICA

TENIENDO EN CUENTA EL FORMALISMO MATEMÁTICO EN EL QUE ÉSTAS SE FORMULARON.

POR ELLO, EN LA PRACTICA, NO SERÁ NECESARIO ACUDIR A LA **TEORÍA** DE **SISTEMAS** PARA CONSTRUIR NUESTROS **MODELOS**.

CONCLUSIÓN 1

LA COMPLEJIDAD DE LA MAYORÍA DE LOS PROBLEMAS INVERSOS ASOCIADOS A SISTEMAS NATURALES NO PERMITE SIEMPRE UN ESTUDIO MATEMÁTICO RIGUROSO.

CONCLUSIÓN 2

AUNQUE NO PAREZCA LEJÍTIMO, EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS SUELE HABER, CASI SIEMPRE, UNA MEZCLA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO RIGUROSO CON UNA COMPONENTE NO FORMAL COMO LA EXPERIENCIA Y LA INTUICIÓN.

POR ELLO HAY QUE VERIFICAR LA CALIDAD DE LAS SOLUCIONES, ES DECIR, SI SON CONFORMES CON LOS OBJETIVOS PROPUESTOS.

CONCLUSIÓN 3

EL PROCESO HISTÓRICO DE LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS EN FÍSICA ES, MAS O MENOS, BIEN CONOCIDO

A VECES LA COMPONENTE INTUITIVA DEGENERA EN INTUITIVA DESEADA Y SE CONSTRUYEN MODELOS AD HOC E, INCLUSO AD HOC SOCIALES

EN ESTOS CASOS, CONOCIMIENTOS GENERALES DE LA TEORÍA DE SISTEMAS PUEDEN SER IMPORTANTES PARA EVALUAR LA PARTE DE DESEO EN LA COMPONENTE INTUITIVA.

YA VIMOS QUE

LA CONSTRUCCION DE ESTOS MODELOS MATEMÁTICOS ES EL OBJETO DELA TEORÍA DE SISTEMAS

SIN EMBARGO, MUCHOS PROBLEMAS DE ASTRONOMÍA, AUNQUE SEAN COMPLICADOS FISICA Y GEOMETRÌCAMENTE (Y, COMO CONSECUENCIA MATEMATICAMENTE) SON SIMPLES BAJO EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA DE SISTEMAS. NO SERÁ NECESARIO (GENERALMENTE) RECURRIR A ELLA.

EN RESUMEN

LO DICHO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE ACUERDO CON LA TEORÍA DE SISTEMAS

SE APLICA IGUALMENTE AL TRATAMIENTO DE LOS PROBLEMAS INVERSOS

HABRÁ UNA COMPONENTE MATEMÁTICA RIGUROSA

Y UNA COMPONENTE HEURÍSTICA, INTUITIVA

FRUTO DEL CONOCIMIENTO DE CADA PROBLEMA ESPECÍFICO

QUE TAMBIÉN PUEDE DEGENERAR EN ENCONTRAR LO QUE SE QUIERA

2-3

ÍNTENTOS DE CLASIFICACION DE LOS MODELOS DE LOS SISTEMAS FISICO-NATURALES

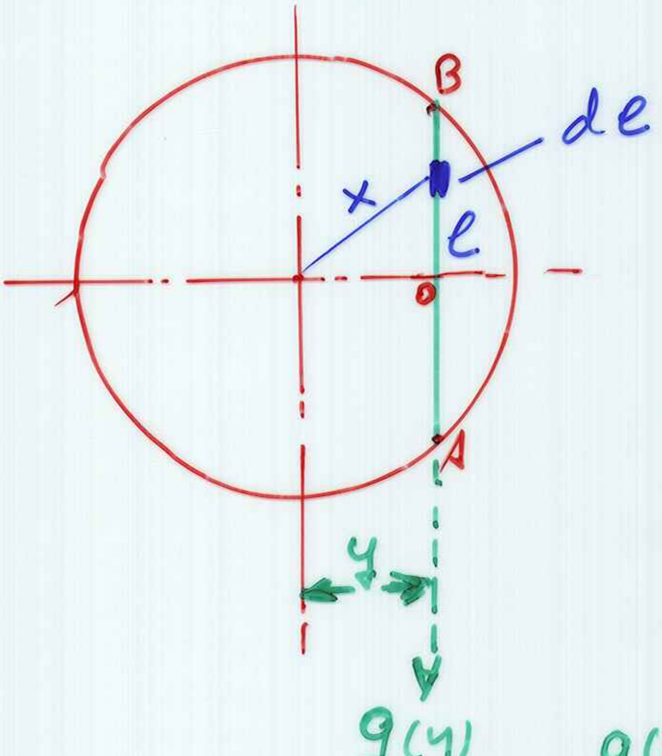
HABÍAMOS DICHO QUE NOS OCUPAREMOS NADA MAS QUE DE MODELOS MATEMÁTICOS ES DECIR DESCRITOS POR ECUACIONES MATEMATICAS QUE REPRESENTAN LOS FENOMENOS NATURALES QUE ESTAMOS ESTUDIANDO

EN ESTE SENTIDO CONSIDERAMOS QUE NUESTROS MODELOS SON LO SUFICIENTEMENTE EXPLICITOS FÍSICA Y MATEMATICAMENTE

EN ALGUNOS CASOS MUY SIMPLES
PESE A LA COMPLEJIDAD DE LA
NATURALEZA

CIERTOS PROBLEMAS QUE NOS
PLANTEAMOS FRECUENTEMENTE
PERMITEN UN PLANTEAMIENTO
MATEMATICO RIGUROSO

RELACIÓN ENTRE LA DENSIDAD $\rho(x)$ DE CADA PUNTO DE UN SISTEMA ESFÉRICO, Y LA DENSIDAD DE COLUMNA $g(y)$ OBSERVADA



$\rho(x)$ DENSIDAD ESPACIAL

x DISTANCIA RADIAL

SE OBSERVA $g(y)$

DENSIDAD DE COLUMNA: INTEGRADA ENTRE A Y B

$$g(y) = \int_A^B \rho(x)\, d\ell = 2\int_0^B \rho(x)\, d\ell$$

$x^2 = \ell^2 + y^2$ LIGADURA

$$\ell = \sqrt{x^2 - y^2} \qquad d\ell = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dx$$

LUEGO

$$g(y) = 2\int_y \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dx$$

P.D. FACILMENTE REALIZABLE

P.I. EXPLICITO

PERO, EN LA MAYORIA DE LOS CASOS

LA COMPLEJIDAD DE LOS SISTEMAS NATURALES

NO PERMITE UN ESTUDIO MATEMATICO RIGUROSO

NO CABE MAS REMEDIO QUE HACER PARA EL MODELO MATEMATICO APROXIMACIONES MÁS O MENOS FUERTES.

ENTONCES: NO PODREMOS PEDIR A LA SOLUCIÓN DEL **P.I.** CORRESPONDIENTE RESULTADOS QUE SEAN FÍSICA Y MATEMATICAMENTE MAS PRECISOS QUE LA PRECISIÓN CON LA QUE HEMOS CONSTRUIDO EL MODELO MATEMÁTICO APROXIMADO

MODELOS MUY APROXIMADOS

PUEDE OCURRIR QUE NI SIQUIERA SEPAMOS HACER UN MODELO MEDIANAMENTE SATISFACTORIO EN TERMINOS DE ECUACIONES MATEMÁTICAS AUNQUE COMPRENDAMOS BIEN LA FENOMENOLOGIA FISICA DEL SISTEMA

ENTONCES

SE SUELEN HACER REPRESENTACIONES EXCESIVAMENTE SIMPLES DEL SISTEMA

PERO PROPORCIONAN RESULTADOS INTERESANTES

EJEMPLO

PROSPECCIÓN ELECTRICA DE SUELOS

SISTEMA FISICO BASADO EN LA LEY DE OHM

- SE INYECTA UNA CORRIENTE ENTRE DOS PUNTOS SEPARADOS DEL TERRENO

- SE MIDE EL POTENCIAL EN ELLOS Y EN PUNTOS INTERMEDIOS

SE OBTIENE INFORMACION SOBRE LA RESISTIVIDAD DEL SUELO EN TODA REGION DONDE PASA LA CORRIENTE

—

ES FACIL ESCRIBIR LA LEY DE OHM. PERO NO ES FACIL SABER CUANTA CORRIENTE PASA SEGÚN TRAYECTORIAS MAS O MENOS PROFUNDAS

3.1.2. LA PROSPECCIÓN ELÉCTRICA

3.1.2.1. SONDEOS ELÉCTRICOS VERTICALES

La obtención de resistividades del subsuelo, mediante métodos eléctricos "resistivos", en concreto por las técnicas de **Sondeos Eléctricos Verticales** (S.E.V.) o **Calicatas Eléctricas** (C.E.), es una operación ya clásica en la prospección geofísica. Su ejecución consta de los siguientes pasos:

1-Introducción en el terreno, de una corriente continua de **Intensidad** (I), mediante **dos electrodos** denominados **A** y **B**, conectados a una fuente de energía, Figura 7.

2-Medida de la **diferencia de potencial** (V), generada por el paso de la corriente, entre **dos electrodos** denominados **M** y **N**.

3-Cálculo de la resistividad del paquete de terreno afectado por el paso de la corriente **(resistividad aparente)**, mediante la siguiente fórmula: $\rho_a = K [V/I]$.

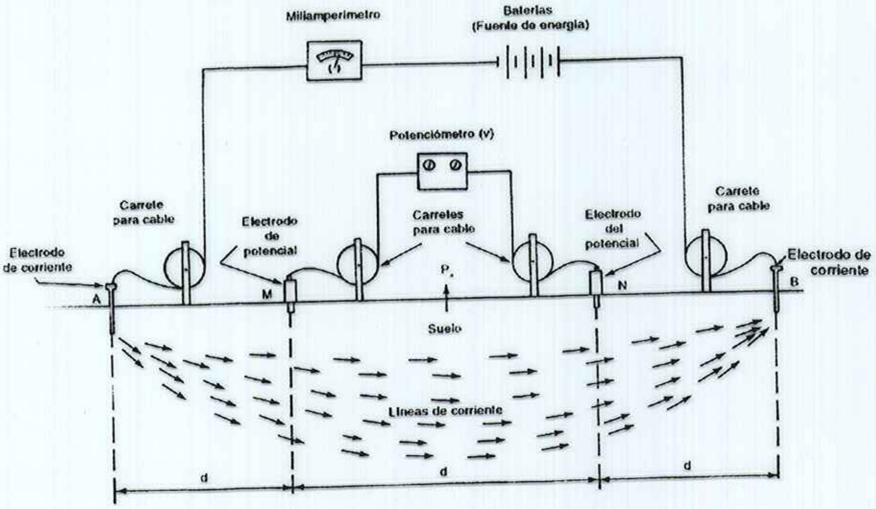


Figura 7. Dispositivo para la obtención de resistividades del subsuelo mediante S.E.V y C.E. Se distinguen en los extremos los electrodos de corriente AB, con su correspondiente amperímetro y carretes de cable, y en el centro los electrodos de potencial MN, conectados al voltímetro (V). Tomado de Ruiz, M & González, S. (1999). Pp. 59

K es una constante de configuración geométrica que depende de las distancias **AM, AN, BM, BN**.

Entre los muy variados dispositivos que existen para la configuración geométrica de las distancias **AM, AN, BM, BN**, los más conocidos son los denominados **Dispositivo Schlumberger** y **Dispositivo Wenner**. En ambos se distribuyen los cuatro electrodos en línea simétricamente con respecto al punto de medida, en las posiciones externas se sitúan los electrodos de corriente AB y en posición central los de potencial MN . Para el dispositivo Wenner la distancia de separación es equidistante para los cuatro electrodos mientras que para Schlumberger la distancia MN es un valor mucho menor a la distancia AB.

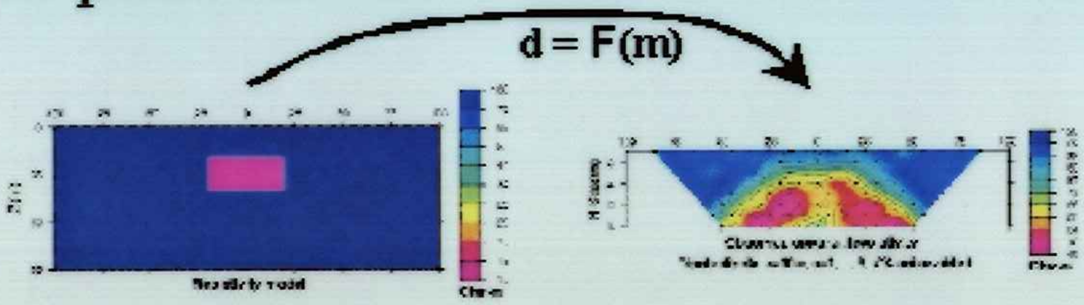
ESTA ULTIMA FALTA DE INFORMACIÓN SE COMPENSA

- BIEN CON MEDIDAS DEL POTENCIAL A DIFERENTES PROFUNDIDADES

- BIEN CON EXPERIENCIAS PREVIAS SOBRE LAS MEDIDAS CITADAS. ESTO NOS PERMITIRÁ CONOCER APROXIMADAMENTE COMO SE REPARTEN LAS LINEAS DE CORRIENTE CON LA PROFUNDIDAD

Forward Modelling

- The forward problem:



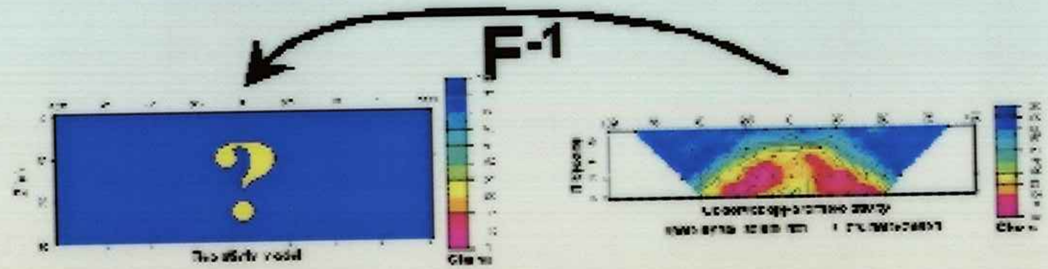
- For a (1D) linear problem:

$$d_i = \int g_i(x)m(x)dx \qquad i = 1, N$$

d_i: datum, g_i: kernel, m: model.

The Inverse Problem

- **Given:**
  - a forward modelling method; $\mathbf{F}[m]$
  - errors on the data; ε
  - and data (observations); $d = \mathbf{F}[m] + \varepsilon$



- **Find:**
  - the model, m, that generated measurements, d.

MODELO:

- SE ADMITE UN COMPORTAMIENTO LINEAL DE TODOS LOS PROCESOS

- SE REPRESENTA UN CORTE VERTICAL DEL TERRENO POR UNA MALLA RECTANGULAR

  Y SE ESCRIBE LA CORRESPONDIENTE LEY DE OHM ENTRE CADA DOS NUDOS CONSECUTIVOS SOBRE LAS LINEAS HORIZONTALES (PARALELAS A LA SUPERFICIE)

SE PLANTEA ASÍ UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

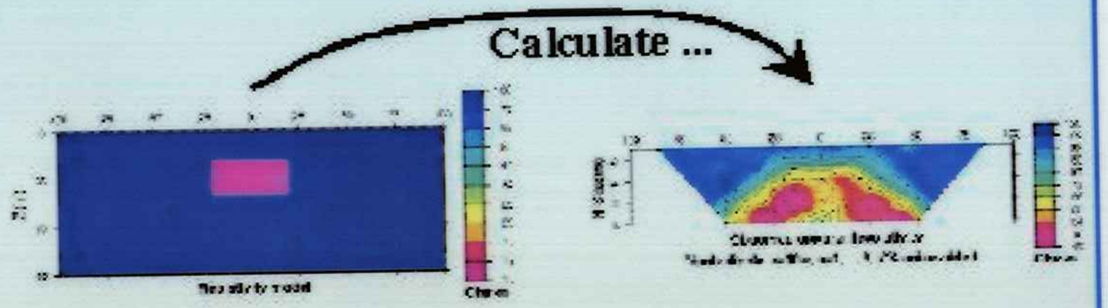
P.D. CONOCIDAS LAS CARACTERÍSTICAS ELECTRICAS: RESISTIVIDAD DEL TERRENO

CALCULAR LOS POTENCIALES EN LOS NUDOS DE LA RED PARA CADA INTENSIDAD INYECTADA

Linear and non-linear problems:

- Recall the forward problem:

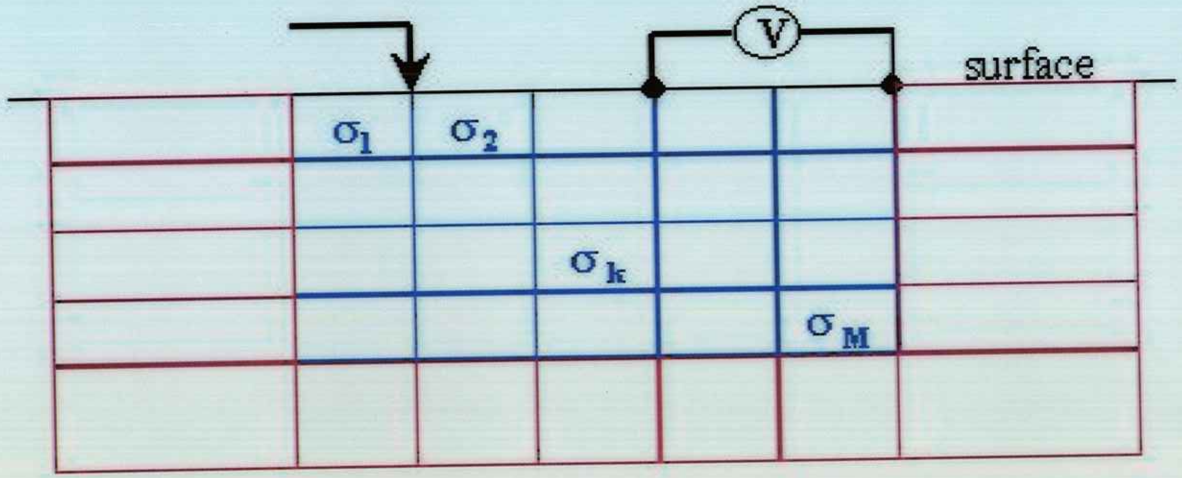
$$\mathbf{F}[m] = \mathbf{d}$$



- Consider
  - two constants c_1, c_2
  - two models m_1, m_2
- A problem is linear if:

$$\mathbf{F}[c_1 m_1 + c_2\, m_2] = c_1\, \mathbf{F}[m_1] + c_2\, \mathbf{F}[m_2]$$

Finite volume solution



- Discretize earth: each cell has constant conductivity
- Source and measurement are at nodes.
- Grid must extend beyond the region of interest to simulate boundary conditions at "infinity".

ESTE P.D. ES FACIL DE RESOLVER?

MULTIPLICAR LAS INTENSIDADES DADAS POR LAS RESISTIVIDADES CONOCIDAS

PERO EL CORRESPONDIENTE P.I. NO SERA TAN FACIL

TENEMOS QUE MEDIR POTENCIALES (RIESGOS DE INTRODUCIR ERRORES) Y REALIZAR UNA INVERSIÓN MATRICIAL

UNA VEZ CONOCIDAS LAS RESISTIVIDADES MEDIANTE UNA TABLA DE RESISTIVIDADES CORRESPONDIENTES A LAS DIFERENTES CARACTERISTICAS DEL TERRENO (EXPERIENCIAS PREVIAS) DEDUCIREMOS ESTAS

Si sucesivamente alejamos los electrodos de corriente A y B, afectaremos cada vez a un conjunto más potente de terreno, contando desde la superficie, y la **resistividad aparente calculada,** será lógicamente de conjuntos cada vez más potentes y cuya representación en un gráfico bilogarítmico generará la **curva de resistividades**, cuya morfología va a depender del número de capas en el subsuelo, sus espesores y sus valores de resistividad, en definitiva, su naturaleza.

Un SEV genera una curva de resistividades que, una vez procesada, constituye una columna de capas del subsuelo caracterizadas por unos espesores y unas resistividades. Las características del objetivo buscado condicionarán la distribución de los SEV en el terreno, bien en perfiles, con una determinada dirección y separación, bien en malla, con una determinada densidad de puntos de medida por superficie.

La representación de la resistividad aparente como función de la apertura de alas AB/2 (directamente relacionada con la penetración), se hace como se muestra en la figura 9 y la forma de la curva, nos indica como varia la resistividad a medida que profundizamos en el terreno.

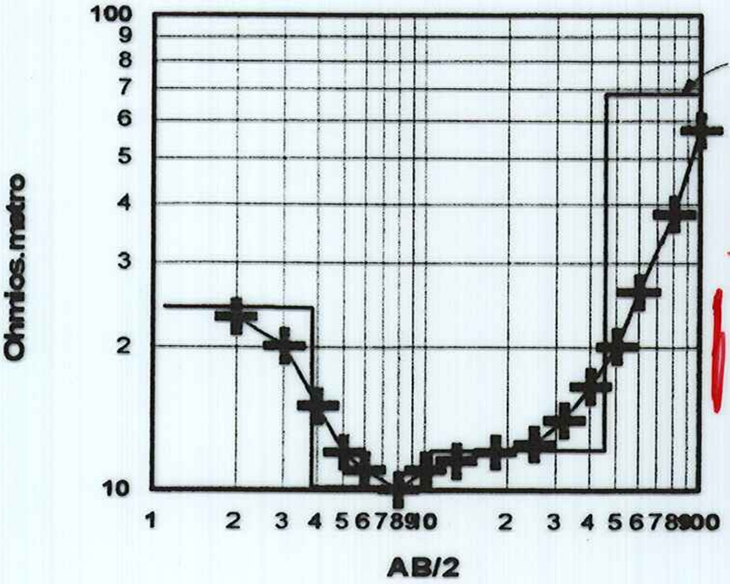


Figura 9. Curva de Resistividades.

Representación de la resistividad aparente ρ_a (ordenadas: Ohmios*metro) en relación con la separación de los electrodos A y B (abscisas: AB/2), separación que es proporcional a la profundidad. Cada una de las cruces gruesas representa una medida de resistividad para una profundidad determinada.

Mediante la interpretación de dichas medidas se deducen cuatro niveles que se corresponden con cuatro capas en el terreno de diferente resistividad:

Capa 1: de 24 Ohmios*metro
Capa 2: de 10 Ohmios*metro
Capa 3: de 13 Ohmios*metro
Capa 4: de 68 Ohmios*metro

Los múltiples sistemas de interpretación conocidos, calculan las resistividades y espesores de cada uno de los niveles individuales que conjuntamente y apilados, producen las resistividades aparentes obtenidas. En la figura 9, se dibujan en línea continua, los niveles de distinta resistividad deducidos en la curva de sondeo, indicando el espesor y la profundidad.

Capa 1: ρ_a = 24 Ohmios*m	AB/2 = 0-3,9 m;	Espesor= 1,95m;	Profundidad= 0 - 1,95m
Capa 2: ρ_a = 10 Ohmios*m	AB/2 = 3,9-11 m;	Espesor= 3,55m;	Profundidad= 1,95- 5,5 m
Capa 3: ρ_a = 13 Ohmios*m	AB/2 = 11-45 m;	Espesor= 17 m;	Profundidad= 5,50- 17 m
Capa 4: ρ_a = 68 Ohmios*m	AB/2 = 45-sigue;	Espesor= ¿?;	Profundidad= 17 - ¿? m

SEA ESTE **P.I.**

MAS O MENOS PRECISO (COMO CONSECUENCIA DE LO POCO PRECISO QUE ES EL MODELO

MAS O MENOS DIFICIL

MAS O MENOS ESTABLE

SE TRATA DE UN **P.I. EXPLICITO**

COMO CONSECUENCIA DE QUE EL MODELO MATEMATICO TOMA LA FORMA DE UN SIMPLE SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES.

PERO PUEDE HABER CASOS EN LOS CUALES EL MODELO MATEMATICO QUE REPRESENTA AL SISTEMA FISICO SEA LO SUFICIENTEMENTE EXPLICITO

EL CORRESPONDIENTE **P.D. : SINTESIS**

SEA MUY DIFICIL DE REALIZAR

MUCHO PEOR SERA PARA EL **P.I.**

SON PROBLEMAS DONDE PROFESIONALMENTE, Y SIN EXCESIVAS SIMPLIFICACIONES ES POSIBLE CONSTRUIR UN MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO EXPLÍCITO

PERO LO SUFICIENTEMENTE COMPLICADO QUE, AUNQUE LA REALIZACION DEL CORRESPONDIENTE **P.D.** ES POSIBLE [PARA ALGO HA DE SERVIR EL MODELO], ES BASTANTE COSTOSA.

MUY DIFICIL DISEÑAR, A LA VISTA DEL MODELO, MECANISMOS ESPECÍFICOS DE INVERSIÓN

. . . .

EJEMPLO

SISTEMA : ATMOTFERA ESTELAR

SE TRATA DE

- Una serie de ecuaciones matemáticas relativamente simples
- Que describen una serie de fenómenos físicos relativamente simples

ACOPLADAS ENTRE SI

Y SOMETIDAS A UNA SERIE DE LIGADURAS: CONDICIONES DE CONSERVACION

QUE PERMITEN OBTENER:

LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA $T(r)$, PRESION $P(r)$ Y DENSIDAD $\rho(r)$ DEL GAS DE COMPOSICION QUIMICA CONOCIDA, DE UNA ATMOSFERA ESTELAR. CUANDO SE CONOCEN LA TEMPERATURA EFECTIVA Y LA GRAVEDAD DE LA ESTRELLA: T_{ef} y g_*

ESTE PROCESO DE SINTESIS:

OBTENER $T(\tau)$, $P(\tau)$, $\rho(\tau)$

CONOCIDAS T_{ef} y g_*

ES REALIZABLE PERO NO FACILMENTE REALIZABLE

NO INMEDIATO

UNA VEZ $T(\tau)$, $P(\tau)$ $\rho(\tau)$

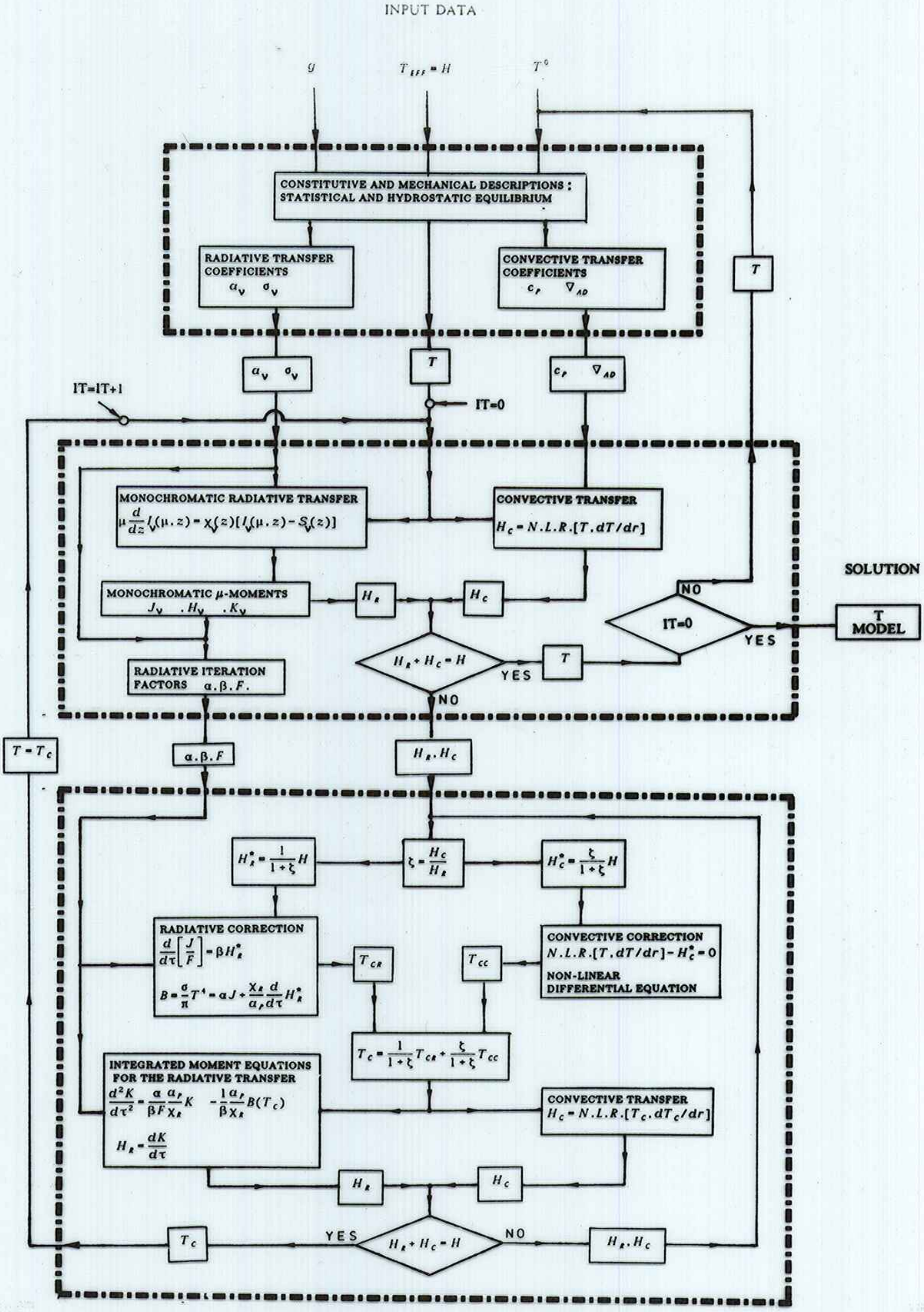
, TAMBIEN CON CIERTAS DIFICULTADES SE PUEDE SINTETIZAR EL ESPECTRO DE LA ESTRELLA.

OPERADOR A · EXPLICITO PERO COMPLICADO

PROBLEMA INVERSO

Determinar T_{ef} y g_* para una estrella de la que se observa su espectro

A. La vez que T_{ef} y g_* se determinan $T(\tau)$, $P(\tau)$ y $\rho(\tau)$


INPUT DATA
g
T_EFF = H
T°
CONSTITUTIVE AND MECHANICAL DESCRIPTIONS : STATISTICAL AND HYDROSTATIC EQUILIBRIUM
RADIATIVE TRANSFER COEFFICIENTS
CONVECTIVE TRANSFER COEFFICIENTS
IT=IT+1
IT=0
MONOCHROMATIC RADIATIVE TRANSFER
CONVECTIVE TRANSFER
MONOCHROMATIC μ-MOMENTS
RADIATIVE ITERATION FACTORS α.β.F.
SOLUTION
NO
IT=0
YES
T MODEL
YES
NO
T = T_C
α.β.F
RADIATIVE CORRECTION
CONVECTIVE CORRECTION
NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION
INTEGRATED MOMENT EQUATIONS FOR THE RADIATIVE TRANSFER
CONVECTIVE TRANSFER
YES
NO

CONCLUSION

PROBLEMAS QUE APARECEN EN EL CAMPO DE LA FÍSICA -Y DE LA NATURALEZA, EN GENERAL-

SABEMOS (CON MAYOR O MENOR GRADO DE APROXIMACIÓN) REPRESENTAR EL SISTEMA FÍSICO MEDIANTE UN MODELO (**OPERADOR A**) FORMADO POR UN SISTEMA DE ECUACIONES MATEMATICAS (DE TODO TIPO), Y DE LIGADURAS

- EN ALGUNOS CASOS LAS ECUACIONES ACOPLADAS ENTRE SI - Y CON LOS DATOS - SON TALES QUE EL CORRESPONDIENTE **P.D.** ES FACILMENTE REALIZABLE

- EN OTROS CASOS, LA ESTRUCTURA DE LAS ECUACIONES, Y DE SU ACOPLO, ES TAL, QUE, AUNQUE EL OPERADOR A SEA EXPLICITO, LA REALIZACIÓN DEL **P.D. (SINTESIS)** NO ES INMEDIATA: NECESITA DE PROTOCOLOS NUMERICOS COMPLICADOS.

Statistical and Computational Inverse Problems

Jari Kaipio Erkki Somersalo

3

Statistical Inversion Theory

This chapter is the central part of this book. We explain the statistical and, in particular, the Bayesian approach towards inverse problems and discuss the computational and interpretational issues that emerge from this approach.

The philosophy behind the statistical inversion methods is to recast the inverse problem in the form of statistical *quest for information*. We have directly observable quantities and others that cannot be observed. In inverse problems, some of the unobservable quantities are of primary interest. These quantities depend on each other through models. The objective of statistical inversion theory is to extract information and assess the uncertainty about the variables based on all available knowledge of the measurement process as well as information and models of the unknowns that are available prior to the measurement.

The statistical inversion approach is based on the following principles:

1. All variables included in the model are modelled as random variables.
2. The randomness describes our degree of information concerning their realizations.
3. The degree of information concerning these values is coded in the probability distributions.
4. The solution of the inverse problem is the posterior probability distribution.

The last item, in particular, makes the statistical approach quite different from the traditional approach discussed in the previous chapter. Regularization methods produce single estimates of the unknowns while the statistical method produces a distribution that can be used to obtain estimates that, loosely speaking, have different probabilities. Hence, the proper question to ask is not *what is the value of this variable?* but rather *what is our information about this variable?*

MODELOS ESTADISTICOS PUROS

?

The most general approach to Inversion Theory, especially linear Inversion Theory, has been recently devised by Tarantola (1981). Tarantola understands the inverse problem as a joint description, using probability densities, of the set of parameters and the set of data. In this description, a "solution" is a probability density obtained on the set of parameters once measurements have been done, ie "a posteriori". Mappings between the two sets are replaced by correlations between the probability densities. This enables Tarantola to say that any solution of the inverse problem is unique, stable, and robust, but one should not forget that a "solution" is simply a description in terms of probability of a set of possible solutions in the ordinary sense. Using probability densities "a priori" that are gaussians, Tarantola has been able to obtain results which are equivalent to the ones obtained by the statistical methods described above. But this formalism enables him to go further, and to study problems in which the statistical description "à la Jackson" does not fit. In particular, he seems to be able to study problems in seismic prediction or volcanology which are intermediate between ordinary inverse problems and the so called shape recognition problems of systems Theory.

Y NECESITA EL CONOCIMIENTO "A PRIORI" DEL COMPORTAMIENTO DE LA SOLUCION

PUEDE SER PARA ENCONTRAL LOS VALORES DE LOS PARAMETROS EN UN CASO PARTICULAR, CUANDO SE CONOCE EL COMPORTAMIENTO GENERAL