1

PROBLEMA INVERSO

CONCEPTO

1.1 P.I. INTRODUCCIÓN

PROBLÈMES INVERSES
INVERSE PROBLEMS
&
ÉVOLUTION NON LINÉAIRE
NON LINEAR EVOLUTION

Comptes rendus de la rencontre
Proceedings of the workshop
R.C.P. 264
Études interdisciplinaires des problèmes inverses
Montpellier, octobre 1979

publiés sous la direction de P. C. SABATIER

Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique
15, quai Anatole-France — 75700 PARIS
1980

ANALYTIC CONTINUATION AND PREDICTION THEORY

S. CIULLI

I HAVE TO ADMIT THAT I HAVE BEEN ALWAYS A BIT PUZZELED BY THE TITLE INVERSE PROBLEMS.

THE WORD INVERSE SUGGETS THAT THERE IS SOME PRIVEEGED DIRECTION IN WHICH THE PROBLEM UNDER CONSIDERATION CAN BE SOLVED, ..

.. WHILE THE OPPOSITE DIRECTION MIGHT INVOLVE INTRICATE MATHEMATICAL DIFFICULTIES.

THIS IS INDEED OFTEN THE CASE SINCE PHYSICAL LAWS AND CONCEPTS WERE PURPOSELY INTRODUCED TO SOLVE SOME SPECIFIC PROBLEMS

IN SUCH A WAY THAT THE EFFEC SHOULD BE AN EASILY COMPUTABLE QUANTITY ONCE THE CAUSES ARE GIVEN.

HENCE THE WORD INVERSE HAS A MUCH DEEPER MEANING THAN THE SIMPLE HISTORICAL ONE. START, FOR INSTANCE, FROM $X = 10$: YOU MIGHT FIND ALMOST INSTANTANOUSLY THAT $X^2 - 6X$ EQUALS 40, WILE IN THE OPPOSITE WAY, TO GET FROM $X^2 - 6X - 40 = 0$ THE VALUE OF X, YOU WILL FIRST HAVE TO PERFORM SOME NON-ENTROPIC STEP LIKE ADDING AND SUBTRACTING $(6/2)^2$, AND THEN TO FACE SOME SPECIFIC DECISION PROBLEM RELATED TO AND INFORMATION BIFURCATION DUE TO THE NONLINEARITY OF THE PROBLEM

Astronomical Inverse Problems

L.B. Lucy

Space Telescope – European Coordinating Facility (ST–ECF), Garching, Germany

1. Introduction

In astronomy, as in other sciences, theoreticians contribute to the growth of knowledge by formulating and solving mathematical problems that purportedly bear on the understanding of some observed phenomenon, and these problems can be classified as being direct or inverse in character. Now, of these two approaches, theoreticians since the time of Newton have preferred direct (or forward) problems, namely those posed in the manner dictated by the perceived causal sequence. Thus, the causative effects are first identified or hypothesized and the implications of this physical model are then calculated and compared with, or fitted to, the experimental data.

When this direct approach yields successful predictions, the phenomenon is deemed to be understood, a point at which in many sciences there would be a precipitous drop of interest in the phenomenon. But in astronomy this point often marks the emergence of a new tool for furthering our quantitative understanding of the Universe. Indeed, throughout much of this century, there have been many such advances in theoretical understanding that now form part of a powerful arsenal of techniques by means of which astronomical observations are transformed into fundamental physical data about celestial objects. These successes and their subsequent usefulness fully justify the already strong intuitive preference that theoreticians have for posing direct problems.

Notwithstanding the stunning successes achieved in astronomy with the direct approach, some topics must be, or are preferably, formulated as inverse problems. In this approach, by seeking from observed consequences to infer the unknown and unobservable causes, we reverse the causal sequence. Fundamentally, we are led to adopt this approach when the experimenter is remote from the object of interest *and* when theoretical understanding is severely limited. This first criterion precludes *in situ* measurements of the quantity of interest, and the second precludes the direct approach of predicting observables on the basis of a physical model. Obviously, this first criterion is often the motivation for formulating inverse problems in astronomy as it is also in the Earth and planetary sciences and in medical diagnostics. Clearly, in astronomy, the hope is that the information gleaned with the inverse approach will eventually allow physical causes to be identified, so that subsequent work can proceed with the intrinsically more powerful direct approach.

LA INVERSIÓN DE LA SECUENCIA CAUSAL

CUANDO SOMOS CONSCIENTES DE LO QUE HACEMOS

Y CONOCEMOS SUFICIENTEMENTE BIEN LOS MÉTODOS PARA HACERLO

PUEDE CONDUCIR A CONCLUSIONES EXTRAORDINARIAS

PERO CUANDO POR PÉRDIDA DE INFORMACIÓN ABSOLUTAMENTE NECESARIA SE CONVIERTE EN IMPOSIBLE

Y SE HACE

GENERALMENTE POR DESCONOCIMIENTO DE ESA PERDIDA DE INFORMACIÓN ABSOLUTAMENTE NECESARIA

PUEDE CONDUCIR A RESULTADOS CATASTRÓFICOS.

PROBLEMAS DIRECTOS P. D.

DEFINIDOS MEDIANTE

REGLAS OPERATIVAS:

DETERMINISTAS Y PRECISAS

LAS REGLAS PARA TRABAJAR
CONSTITUYEN LA PROPÍA
DEFINICIÒN DEL PROBLEMA

O SEA
LA DEFINICIÒN DEL PROBLEMA
SE CONSIGUE A PARTIR DE LA
DESCRIPCIÒN DE LA FORMA
PARA RESOLVERLO.

EJEMPLO: **SUMAR**

LA DEFINICIÒN OPERATÍVA
SE SUELE HACER A PARTIR
DE UNAS TABLAS:

TABLA DE SUMAR

1 más 1 = 2	2 más 1 = 3	3 más 1 = 4	4 más 1 = 5
1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6	4 + 3 = 7
1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	4 + 4 = 8
1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9
1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = 10
1 + 7 = 8	2 + 7 = 9	3 + 7 = 10	4 + 7 = 11
1 + 8 = 9	2 + 8 = 10	3 + 8 = 11	4 + 8 = 12
1 + 9 = 10	2 + 9 = 11	3 + 9 = 12	4 + 9 = 13
5 más 1 = 6	6 más 1 = 7	7 más 1 = 8	8 más 1 = 9
5 + 2 = 7	6 + 2 = 8	7 + 2 = 9	8 + 2 = 10
5 + 3 = 8	6 + 3 = 9	7 + 3 = 10	8 + 3 = 11
5 + 4 = 9	6 + 4 = 10	7 + 4 = 11	8 + 4 = 12
5 + 5 = 10	6 + 5 = 11	7 + 5 = 12	8 + 5 = 13
5 + 6 = 11	6 + 6 = 12	7 + 6 = 13	8 + 6 = 14
5 + 7 = 12	6 + 7 = 13	7 + 7 = 14	8 + 7 = 15
5 + 8 = 13	6 + 8 = 14	7 + 8 = 15	8 + 8 = 16
5 + 9 = 14	6 + 9 = 15	7 + 9 = 16	8 + 9 = 17

9 más 1 = 10	**Sumar es reunir varios números en uno solo.**
9 + 2 = 11	
9 + 3 = 12	**Los números que deseamos sumar, se llaman** sumandos.
9 + 4 = 13	
9 + 5 = 14	**El resultado se llama** suma.
9 + 6 = 15	
9 + 7 = 16	**El signo de sumar es una** + **y se lee** más.
9 + 8 = 17	
9 + 9 = 18	

LAS TABLAS ANTERIORES PROPORCIONAN LA SUMA DE LOS DIEZ PRIMEROS NUMEROS NATURALES, CON TODOS Y CADA UNO DE ELLOS

ESTAS TABLAS LAS TENEMOS QUE CONOCER SI QUEREMOS SUMAR

ADEMÁS, UN CONJUNTO DE REGLAS OPERATIVAS

JUNTO CON LAS TABLAS ANTERIORES

PERMITEN SUMAR CUALQUIER NUMERO NATURAL MAYOR QUE 10.

NO NECESITAMOS MÀS QUE LAS TABLAS Y CIERTAS REGLAS PARA SUMAR NÙMEROS MAYORES.

LO MISMO OCURRE CON LA MULTIPLICACIÓN

TABLA DE MULTIPLICAR

Multiplicar es sumar varias veces el mismo número

1 por 1 es 1	2 por 1 es 2	3 por 1 es 3
1 x 2 = 2	2 x 2 = 4	3 x 2 = 6
1 x 3 = 3	2 x 3 = 6	3 x 3 = 9
1 x 4 = 4	2 x 4 = 8	3 x 4 = 12
1 x 5 = 5	2 x 5 = 10	3 x 5 = 15
1 x 6 = 6	2 x 6 = 12	3 x 6 = 18
1 x 7 = 7	2 x 7 = 14	3 x 7 = 21
1 x 8 = 8	2 x 8 = 16	3 x 8 = 24
1 x 9 = 9	2 x 9 = 18	3 x 9 = 27
1 x 10 = 10	2 x 10 = 20	3 x 10 = 30
4 por 1 es 4	5 por 1 es 5	6 por 1 es 6
4 x 2 = 8	5 x 2 = 10	6 x 2 = 12
4 x 3 = 12	5 x 3 = 15	6 x 3 = 18
4 x 4 = 16	5 x 4 = 20	6 x 4 = 24
4 x 5 = 20	5 x 5 = 25	6 x 5 = 30
4 x 6 = 24	5 x 6 = 30	6 x 6 = 36
4 x 7 = 28	5 x 7 = 35	6 x 7 = 42
4 x 8 = 32	5 x 8 = 40	6 x 8 = 48
4 x 9 = 36	5 x 9 = 45	6 x 9 = 54
4 x 10 = 40	5 x 10 = 50	6 x 10 = 60

TABLA DE MULTIPLICAR

7 por 1 es 7	8 por 1 es 8	9 por 1 es 9
7 x 2 = 14	8 x 2 = 16	9 x 2 = 18
7 x 3 = 21	8 x 3 = 24	9 x 3 = 27
7 x 4 = 28	8 x 4 = 32	9 x 4 = 36
7 x 5 = 35	8 x 5 = 40	9 x 5 = 45
7 x 6 = 42	8 x 6 = 48	9 x 6 = 54
7 x 7 = 49	8 x 7 = 56	9 x 7 = 63
7 x 8 = 56	8 x 8 = 64	9 x 8 = 72
7 x 9 = 63	8 x 9 = 72	9 x 9 = 81
7 x 10 = 70	8 x 10 = 80	9 x 10 = 90

La multiplicación se compone de dos términos, que se llaman multiplicando **y** multiplicador **y a cada uno de ellos se les llama** factor.

Al resultado de la multiplicación se le llama producto.

El signo de multiplicar es una x **que quiere decir** por.

Esto es:

X = por.

AMBOS P.D.: SUMA Y MULTIPLICACIÓN CONDUCEN A IMPORTANTES PROBLEMAS INVERSOS P.I.

P.I. DE LA SUMA:

ENCONTRAR UN NUMERO N ~~TAL~~ QUE SUMADO A OTRO DADO N_1 PROPORCIONE OTRO NUMERO N_2 DADO TAMBIÉN

$$N + N_1 = N_2$$

P.I. SE TRATA DE ENCONTRAR N CONOCIDOS N_1 Y N_2

P.I. DE LA MULTIPLICACIÓN

ENCONTRAR UN NUMERO N TAL QUE MULTIPLICADO POR OTRO DADO N_1 PROPORCIONE OTRO NUMERO DADO TAMBIÉN

$$N \times N_1 = N_2$$

P.I SE TRATA DE ENCONTRAR N CONOCIDOS N_2 Y N_2

ESTOS **P.I.** SE DEFINEN A PARTIR DE SU PROPIA PRETENSIÓN Y NO A PARTIR DE REGLAS OPERATIVAS

LA PRETENSIÓN CONSISTE EN ENCONTRAR - COMO SEA - UN RESULTADO QUE DEBA SATISFACER EL PROBLEMA DIRECTO: **P.D.**

LUEGO LOS **P.I.** SE PLANTEAN COMO UN SUBPRODUCTO DE LOS **P.D.**

POR ELLO DEBEREMOS PARA SU RESOLUCIÓN, CONOCER MUY BIEN, LAS TABLAS Y REGLAS OPERATIVAS DE LOS **P.D.** CORRESPONDIENTES

P.I. DE LA SUMA

$$N + N_1 = N_2$$

PROPONEMOS $N = 1$

P.D. $1 + N_1 =$ Resultado

Si Resultado $= N_2 \Rightarrow N = 1$ solución

Si Resultado $< N_2$

PROPONEMOS $N = 2$

P.D. $2 + N_1 =$ Resultado

ETC, ETC.

TAL PROCESO DE PRUEBA-ERROR-CORRECCIÓN PUEDE GENERAR ALGORITMOS OPERATIVOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA EN LA PRACTICA

$$N_2 - N_1 = N$$

DIFERENCIA : ALGORITMO OPERATIVO

PERO SI $N_2 < N_1$ CATÁSTROFE

1er TIPO DE P.I. $\Rightarrow$

$\rightarrow$ 1a CATASTROFE MATEMÁTICA

"NUMEROS NEGATIVOS"

P. I. DE LA MULTIPLICACIÓN

PROCESO DE PRUEBA-ERROR-CORRECCIÓN
IGUAL QUE EL ANTERIOR
IGUALMENTE TAL PROCESO
PUEDE GENERAR ALGORITMOS
OPERATIVOS PARA RESOLVER
EL PROBLEMA EN LA PRÁCTICA

$$\frac{N_2}{N_1} = N$$

DIVISIÓN: ALGORITMO OPERATIVO

PERO PUEDE OCURRIR QUE
MULTIPLICANDO TODOS LOS
NUMEROS NATURALES $N = 1, 2, 3 \cdots$
POR N_1 NO ENCONTREMOS
NUNCA EL N_2 DADO.

CATÁSTROFE MUCHO
MAYOR AÚN.

OTRO **P.I.** DE LA **MULTIPLICACIÓN**

ENCONTRAR UN NUMERO N

TAL QUE MULTIPLICADO POR SÍ-MISMO, PROPORCIONE OTRO NUMERO DADO N_2

$$N \times N = N_2$$

PARA LA INMENSA MAYORÍA DE LOS NUMEROS NATURALES N_2 EL PROBLEMA NO TIENE SOLUCION DENTRO DE LOS NUMEROS NATURALES

CATASTROFE (al cuadrado)

COMO SE PUEDE VER
SIN ALUDIR A DETERMINISMOS
NI A LA SECUENCIA CAUSAL

NI SIQUIERA A EXCESIVAS
PRETENSIONES DE PRECISIÓN
MATEMATICA

LAS DIFERENCIAS ENTRE
LOS P.D. ANTERIORES Y LOS P.I
CORRESPONDIENTES, SON
BASTANTE GRANDES

ENCONTRAR UN N TAL QUE

$N \times N + 6 \times N = 160$

NO ES TAN FACIL COMO HACER

$10 \times 10 + 6 \times 10 =$

1.5 CLASSIFICATION OF PROBLEMS IN COMPUTATIONAL MATHEMATICS

We can now make a rather broad, but still useful classification of the types of problems one encounters in computational mathematics. A large number of problems arising in applied mathematics and therefore of interest to the numerical analyst can be stated formally as: Solve the equation

$$Tx = y \tag{1.32}$$

where $x \in X, y \in Y$, X and Y are linear spaces, and $T: X \to Y$. To elaborate, we can recognize three distinct types of problems.

1. *The direct problem*. Given T and x, find y. The computation of the definite integral is an example.
2. *The inverse problem*. Given T and y, find x. Solving systems of simultaneous equations, ordinary and partial differential equations, and integral equations are examples.
3. *The identification problem*. Given x and y, find T.

In the language of systems engineering, x, y, and T represent the input, output, and the system, respectively. Thus, in a direct problem, we are trying to determine the output of a given system generated by a known input; in the inverse problem one looks for the input which generates a known output. In the identification problem one tries to find the laws governing a system from a knowledge of the relation between input and output (generally we know only a finite number of input-output pairs).

Each type of problem generates its own specific questions, and classes of algorithms and success in developing a general theory has varied.

At first sight the formulation (1.32) may seem too restrictive, since often one has not only an equation to solve, but also initial or boundary conditions to satisfy.

Direct problems are relatively easily treated. Numerical integration is the main example and this is now quite well understood. This is not to say that all difficulties have been resolved. There are still many theoretical and practical questions unanswered, as for instance in the evaluation of n-dimensional integrals with n fairly large. Nevertheless, the problem is conceptually simple and a general theory not very complicated as we will see in Chapter 3.

The inverse problem, because of its importance in applications, occupies a central place in numerical analysis. The linear case, in particular, has been studied extensively and its theory is well-developed. The situation is somewhat less satisfactory in the nonlinear case. Chapters 4 and 5 will deal with the inverse problem.

The identification problem in a general setting is rather difficult. This is not surprising when we consider its interpretation: from a finite number of observations we are trying to infer the laws governing an unknown "black-box" system. This is generally impossible unless one has specific information on the structure of the system. The identification problem in its simplest form is a topic in approximation theory, which will be discussed in Chapter 2. Here the operator is a function of one variable and we are asked to find the function whose graph passes through (or close to) a set of points $\{x_i, y_i\}$. Clearly, this question cannot be answered uniquely unless we restrict the class of admissible functions. In the more complicated case where X and Y are infinite-dimensional spaces, the best one can do is to assume some plausible form for T, include in it some undetermined parameters, and then compute the values of these parameters which best explain the observed input-output relationship. This leads to the topics of minimization of functionals, mathematical programming, and statistics. Except for a brief discussion of the fundamentals of minimization in Chapter 5 we will not pursue this topic.

1. 2.

P. I. DESCRIPTIVA GENERAL

Formally, to solve an inverse problem means to discover the cause of a known result. Hence, all problems of the interpretation of observed data are actually inverse.

At present, a good deal of all computer activity is related to the mathematical simulation of natural objects. Modern computers can successfully solve the direct problems (that is, calculate the observable properties) for very complicated models. But when inverse problems are attempted very severe difficulties are often encountered.

Esta es una definición demasiado general como para poder concluir resultados prácticos. Por ello vamos a ir precisando sus diferentes aspectos.

II.- PROBLEMA INVERSO

Copiamos directamente del libro "INVERSE PROBLEMS IN ASTRONOMY", de I.J.D. Craig y J.C. Brown (1976):

"La Astronomía es el mejor ejemplo de una ciencia observacional - por oposición a ciencia experimental - en el cual el ingenio del observador se enfrenta a las dificultades y, en particular, a las ambigüedades impuestas por la necesidad de interpretar datos teledetectados (percibidos a distancia).

No en vano fué en la Astronomía donde se aplicaron por primera vez técnicas propias de la Transformada de Radon para reconstruir una estructura espacial, a partir de las medidas (observaciones) de propiedades proyectadas: V. Ambartsumian (1936), al estudiar el problema de deducir la distribución espacial de las velocidades de las estrellas en las proximidades del Sol, a partir, solamente, de las medidas de sus velocidades radiales. Igualmente la primera reconstrucción de imágenes a partir de la observación de sus proyecciones fué en el campo de la Radio-Astronomía: R.N. Bracewell, hacia 1950. Después, este tipo de técnicas se han desarrollado practicamente en Biología y Medicina: Rayos X, Imágenes Tomográficas, Scanner, etc., y se han perdido practicamente en el campo donde se iniciaron.

Sin embargo, como se ha puesto de manifiesto en estas últimas ciencias, su importancia en el tratamiento de la información teledetectada es muy grande. Es pues hora de recuperarlas para la Astronomía adaptándolas, en la medida de lo posible, a los problemas típicos de esta ciencia en los que se presenta la necesidad de reconstruir estructuras, o bien en los que se presentan aspectos matemáticos similares.

copiemos directamente del libro "The Radon Transform and some of its applications", de S.R. Deans (1983); *Las técnicas que se estudian bajo el calificativo de PROBLEMA INVERSO, permiten la determinación o reconstrucción de algunos aspectos de la estructura interna de un objeto, sin tener que alterarle o perturbarle.*

Pero, el "sin tener que alterarle o perturbarle", o, más explícitamente, el "sin tener", indica una posibilidad de poder.

Y es que hay situaciones en las que, evidentemente no se puede. Es el caso de todas las situaciones de la ASTRONOMÍA-ASTROFÍSICA: No se puede sondear, ni directa ni indirectamente, (actuando sobre la sonda - se entiende -), el interior de los objetos. Hay que conformarse con analizar la luz que de los astros nos llega.

Es decir hay situaciones en las cuales se pueden estudiar directamente los objetos. Experimentar en laboratorios o sobre el terreno.

Hay situaciones mixtas: experimentación y observación + problema inverso.

Existen situaciones de observación + problema inverso en las cuales se puede actuar sobre el propio fenómeno (sismología, consecuencia de explosiones, por ejemplo)

Y por último, hay situaciones donde no se puede nada más que observar, sin poder actuar sobre el objeto

Esto nos lleva a otros ejemplos donde no se puede ni alterar ni perturbar el objeto observado:

CIERTOS DIAGNOSTICOS MÉDICOS:

Hay regiones del cuerpo humano, para las cuales el diagnóstico de su estructura – en un determinado momento – se debe hacerlo sin alterarlo mucho

Aunque, existe una diferencia fundamental con el ejemplo astronómico: EN EL NUMERO Y LA CALIDAD DE LAS OBSERVACIONES

En MEDICINA se pueden hacer muchísimas más observaciones, y sobre todo, orientadas a la determinación de la structure del objeto en estudio. En ASTRONOMIA hay que conformarse con observar según una dirección

ESTO CONDICIONA MUCHO EL RESULTADO DEL PROBLEMA INVERSO.

PROBLEMA INVERSO

DESCUBRIR LA CAUSA X
DE UN RESULTADO Y
QUE SE CONOCE

$$\text{CAUSA } X \underset{\text{P.I.}}{\overset{\text{P.D.}}{\rightleftarrows}} \text{RESULTADO } Y$$

RECONSTRUCCION DE LA
ESTRUCTURA INTERNA
DE UN OBJETO, SIN
ALTERARLE O PERTURBARLE

CIENCIAS OBSERVACIONALES
PODER Y/O NO PODER
ACTUAR SOBRE EL SISTEMA

ASTRONOMÍA
MEDICINA
GEOFISICA : SISMOLOGÍA

IMPORTANTE

Les grands problèmes inverses présentent deux caractéristiques : (a) ils apparaissent, sous des formulations équivalentes, dans plusieurs disciplines (caractère multidisciplinaire) ; (b) les méthodes pour les résoudre ajoutent des caractéristiques particulières à chaque problème physique (dépendant de la discipline) à une structure mathématique générale (caractère interdisciplinaire).

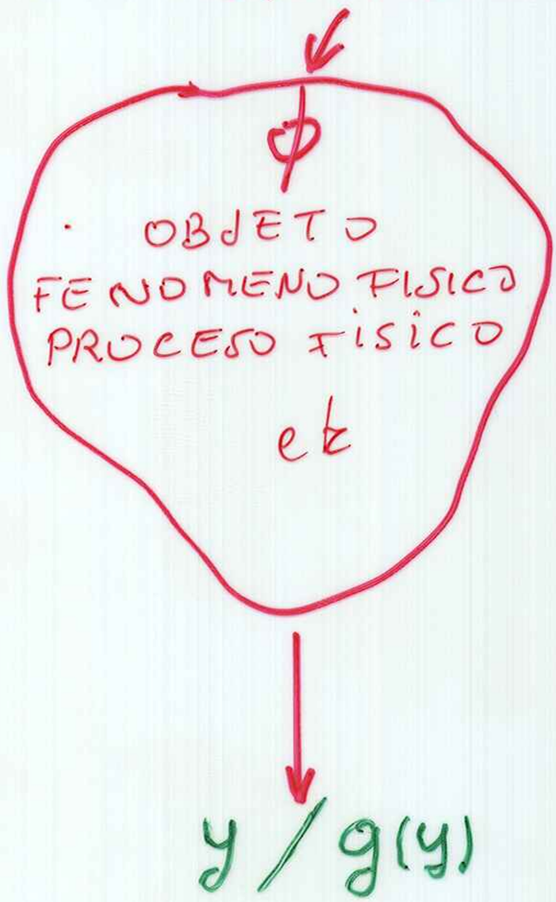
Application de la theorie de l'Inversion.
P. C. SABATIER

There are several steps in Inverse Problems analysis. They progressively appear in the development of the subject. Fitting procedures are the first step, which is usually founded on a primitive physical approach of the problem. Mathematical Inversion Theory is the second step. It yields a general schema for analyzing the Inverse Problem.

1.3

P.I. PRECISIONES
FORMALISTAS

MUCHAS VECES NOS VEMOS DELANTE DE UN SISTEMA ϕ



DEL CUAL OBSERVAMOS / / MEDIMOS EL VALOR DE UNA/S VARIABLE/S DISCRETA

y / y_1, y_2, y_3

O DE UNA VARIABLE CONTINUA

$g(y)$

¿QUE PODEMOS DECIR DE ESE SISTEMA:

PARA RESPONDER TENDRÍAMOS QUE SABER COMO DEPENDEN y O $g(y)$ DE LAS PROPIEDADES DEL SISTEMA ϕ

TENEMOS QUE HACER UN MODELO DE ϕ

APARECE INMEDIATMENTE UNA
DESCRIPCIÓN CUALITATIVA:

DESCRIPCIÓN FÍSICA
DESCRIPCION GEOMÉTRICA etc

QUE RELACIONAN LAS PROPIEDADES INTERNAS DEL OBJETO (PROPIEDADES QUE QUEREMOS DIAGNOSTICAR) CON LAS VARIABLES $y / g(y)$ QUE MEDIMOS

PERO, SI QUEREMOS MAS PRECISIONES

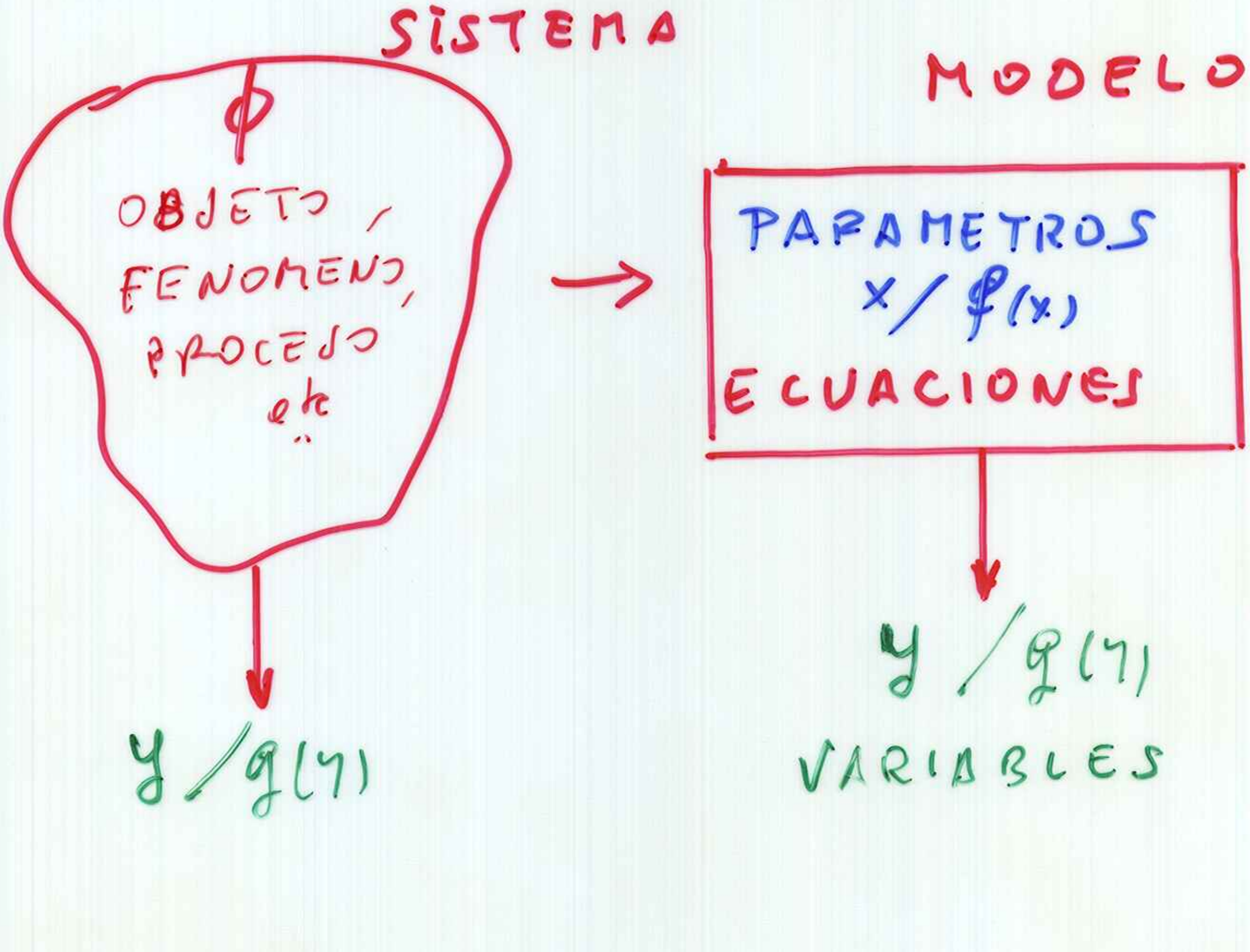
NECESITAMOS UNA DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA: MATEMATICA

ES DECIR

UN MODELO MATEMÁTICO DEL OBJETO

EN PRIMER LUGAR EL OBJETO, O SU MODELO SE EVALUARÁ CUANTITATIVAMENTE A PARTIR DE LOS VALORES PARTICULARES DE UNOS CIERTOS PARÁMETROS $x_1, x_2, x_3 \ldots$ O DE FUNCIONES CONTINUAS $f(x)$ DE ELLOS.

LA ESTRUCTURA MATEMATICA DE ESTE **MODELO** VIENE DETERMINADA POR UNA SERIE DE **ECUACIONES MATEMÁTICAS** (EN LAS QUE INTERVIENE TODA LA FISICA Y LA GEOMETRÍA) Y EN LAS QUE INTERVIENEN COMO PROTAGONISTAS LOS CITADOS **PARAMETROS ESTRUCTURALES**: x / $f(x)$ Y LAS CITADAS **VARIABLES OBSERVADAS** y / $g(y)$



THEORETICAL CONSIDERATIONS FOR INVERSE SCATTERING

Pierre C. SABATIER

I Introduction.

Interpreting data is an art in which measurement data are related to theoretical parameters by means of a mathematical model. This model consists of a mapping, M , from the set F of all possible parameters to the set G of all possible measurements. Describing this mapping is the Direct Problem. Finding reciprocal images of all elements of interest in G is the Inverse Problem.

PROBLEMA INVERSO COMO INTERPRETACION FISICA DE DATOS

COPIADO DE P.C. SABATIER

INTENTAMOS DESCRIBIR UN FENOMENO NATURAL COMO UN SISTEMA MATEMATICO EN EL CUAL CIERTAS CANTIDADES PROTAGONISTAS ESTÁN RELACIONADAS ENTRE SÍ POR MEDIO DE CIERTAS ECUACIONES QUE REPRESENTAN LAS LEYES DE LAS CIENCIAS NATURALES. ESAS CANTIDADES SON: LAS VARIABLES MEDIANTE LAS CUALES EL SISTEMA SE MANIFIESTA Y NOS PERMITE TENER NOTICIA DE ÉL, Y LOS PARAMETROS ESTRUCTURALES QUE PERMITEN CUANTIFICAR LAS PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA DEL SISTEMA.

G ESPACIO DE TODOS LOS POSIBLES VALORES DE LAS VARIABLES $y \,/\, g(y)$

F ESPACIO DE TODOS LOS POSIBLES VALORES DE LOS PARAMETROS $x \,/\, f(x)$

SE CONSIDERA QUE UN SISTEMA COMO EL ANTERIOR CONSTITUYE UN **MODELO MATEMATICO** SI DANDO VALORES A **LOS PARAMETROS** PODEMOS PREDECIR COMO RESULTADO CUALQUIER VALOR QUE PODAMOS MEDIR PARA **LAS VARIABLES**

ES DECIR SÍ EXISTE UNA **CORRESPONDENCIA M** ENTRE EL CONJUNTO **F** DE TODOS LOS VALORES POSIBLES DE **LOS PARAMETROS** Y EL CONJUNTO **G** DE TODOS LOS VALORES POSIBLES DE **LAS VARIABLES**

DADA **LA CORRESPONDENCIA M**

- CONOCIDOS LOS VALORES DE **LOS PARAMETROS** CALCULAR LOS VALORES DE **LA VARIABLES**

  PROBLEMA DIRECTO

- CONOCIDOS LOS VALORES DE **LAS VARIABLES** CALCULAR LOS VALORES DE **LOS PARAMETROS**

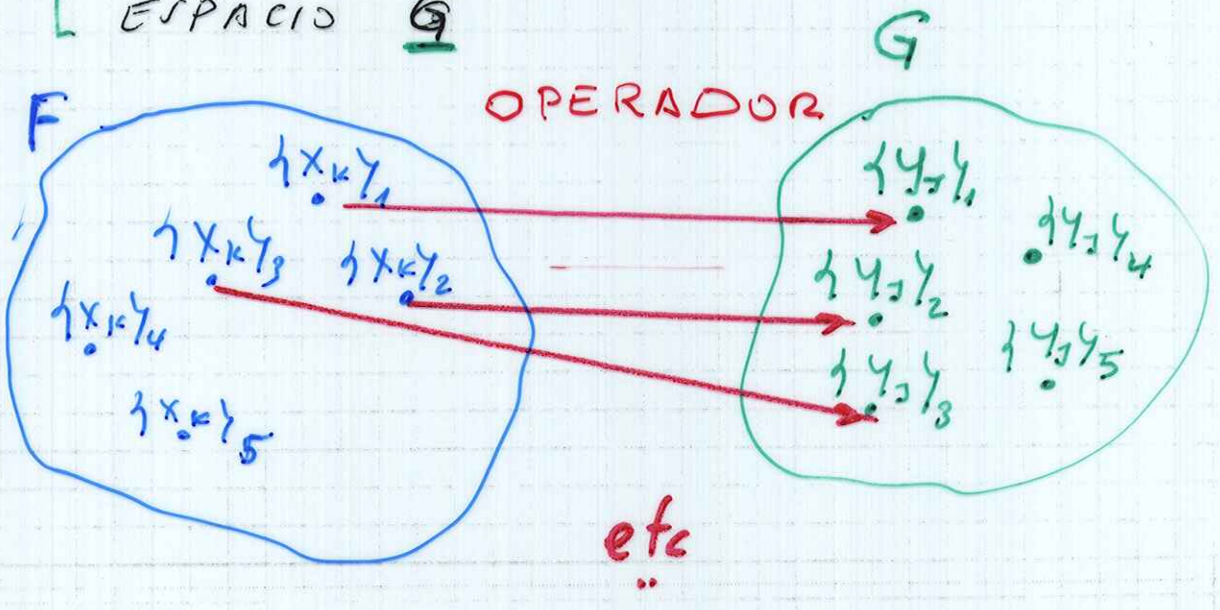
  PROBLEMA INVERSO

ESQUEMA GENERAL

ACABAMOS DE VER QUE, DADO UN SISTEMA FORMADO POR ECUACIONES FISICO-MATEMATICAS, REPRESENTADAS POR UN OPERADOR QUE ACTUA SOBRE UNAS VARIABLES INTERNAS, LLAMADAS PARAMETROS DE ESTADO X, PARA PROPORCIONAR LOS VALORES DE UNAS VARIABLES EXTERNAS, QUE IDENTIFICAMOS CON NUESTRAS VARIABLES OBSERVADAS

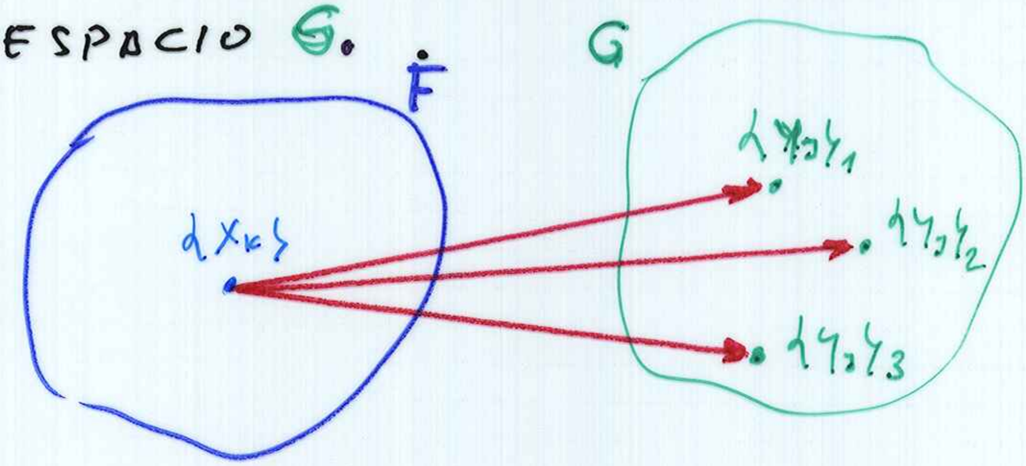
CADA CONJUNTO DE VALORES DE LOS PARAMETROS: $(x_1, x_2, x_3 - - x_{NP}) \equiv \{x_k\}$ SERÁ UN ELEMENTO DE UN CIERTO ESPACIO F

CADA CONJUNTO DE VALORES DE LAS VARIABLES: $(y_1, y_2, y_3 \cdots y_{NV}) \equiv \{y_j\}$ SERÁ UN ELEMENTO DE UN CIERTO ESPACIO G



PUEDE OCURRIR TAMBIÉN
Y ELLO PUEDE AFECTAR
- CUANTITATIVAMENTE AL ESFUERZO NUMÉRICO EN EL TRATAMIENTO DEL P.I.
- Y A LA CALIDAD DE SU SOLUCIÓN

QUE UN ELEMENTO $\{x_k\}$ DEL ESPACIO F ORIGINE VARIOS ELEMENTOS DEL ESPACIO G.



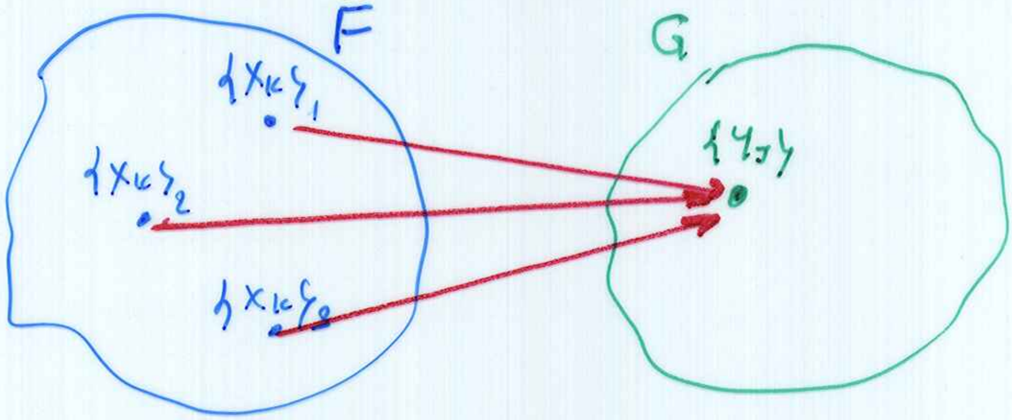
PODRÍA PENSARSE QUE, ENTONCES TENEMOS MAS INFORMACION QUE LA NECESARIA PARA ENCONTRAR EL VALOR DE ESE ELEMENTO AL TRATAR EL P.I.

PERO PARA QUE SEA UNA CIRCUNSTANCIA FAVORABLE
HAY QUE SER CONSCIENTES DE QUE OCURRE
A VECES, SI NO LO SOMOS ESTA SITUACIÓN PUEDE SER CATASTRÓFICA

EL PROBLEMA DIRECTO: P.D. ASOCIA - CON RELATIVA FACILIDAD - A CADA ELEMENTO $\{x_k\}$ DEL ESPACIO F UN ELEMENTO $\{y_j\}$ EN EL EPACIO G .

EL PROBLEMA INVERSO: P.I. DEBERÍA ENCONTRAR PARA CADA ELEMENTO DEL ESPACIO G EL ELEMENTO ORIGEN $\{x_k\}$ DEL ESPACIO F .

PERO ESTE PROCESO NO ES TAN TRIVIAL. YA QUE DOS O MAS ELEMENTOS DEL ESPACIO F PUEDEN ORIGINAR (CUANDO ACTUA SOBRE ELLOS EL OPERADOR QUE REPRESENTA AL SISTEMA) EL MISMO ELEMENTO DEL ESPACIO G .



<u>EL P.I</u> : <u>PROBLEMA DE DIAGNOSTICO</u> DE LOS <u>PARAMETROS DEL SISTEMA</u>, NO VA A SER TAN FACIL COMO EL P.D.

ESTE TIPO DE ESQUEMAS

SOBRE EL QUE VOLVEREMOS
ALGUNA QUE OTRA VEZ

ES MUY IMPORTANTE PARA
EXPLICAR LAS DIFICULTADES
DEL PROBLEMA INVERSO

A VECES LAS EXPLICACIONES
ELEMENTALES SON MOTIVO PARA
HACER PUBLICACIONES DE GRAN
ALTURA PROFESIONAL

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 310:473–481, 1986 November 1

OPTIMIZATION ALGORITHMS: SIMULATED ANNEALING AND NEURAL NETWORK PROCESSING

W. JEFFREY AND R. ROSNER
Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics
Received 1985 December 9; accepted 1986 March 19

ABSTRACT

We develop and compare two algorithms which have been previously used for discrete optimization: simulated annealing and neural network processing. We demonstrate how these algorithms can be used to find global extrema of functions, while avoiding trapping in local extrema. In the standard treatment of neural network processors, only quadratic and linear terms in the function variables are included in the objective function. We extend this traditional approach to show how constraints not expressible in quadratic and linear terms (e.g., entropy) can be incorporated into the function to be minimized. We also demonstrate the efficiency of our implementation of neural net processing and show how its speed advantage over more traditional optimization techniques (even when implemented on serial processors) is related to its convergence properties. An important application of our results is in the interpretation of remote sensing data, since typical indirect sensing problems can be readily cast into the language of optimization theory; the methods presented here have the particular ability to solve severely ill posed inversion problems. The algorithms described here have been implemented on a serial processor but are cast in a form which is ideally suited for parallel processing.

Subject heading: numerical methods

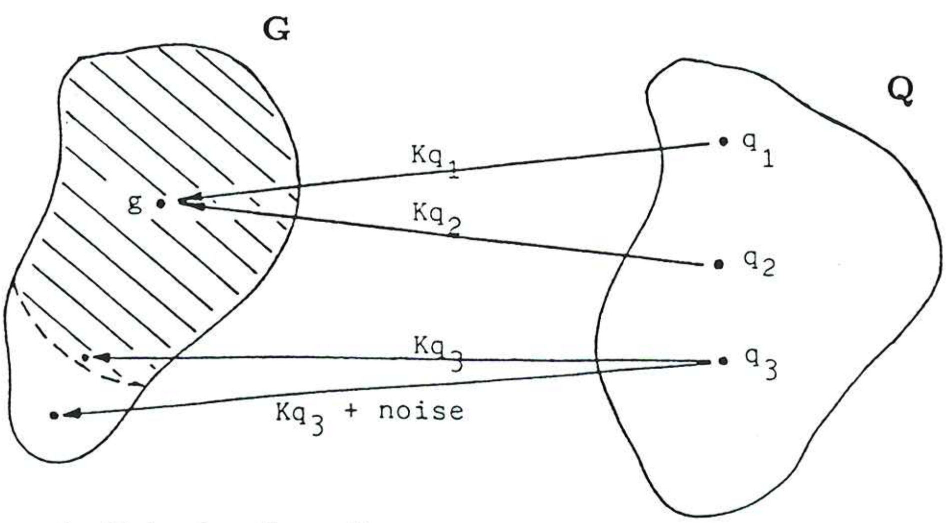


FIG. 1.—Schematic representation of the inversion problem posed by eq. (2.1), and the origin of its ill-posed and ill-conditioned nature (the details are discussed in the text). The shaded region in the data space G indicates the range of K.

Still now, many studies of inverse problems would be greatly improved if a systematic use of Inversion Theory was made. However, this use would not be sufficient. In the last few years, we found more and more obvious that a study using only the mathematical schemes of Inversion Theory is not satisfactory. In a complete study of an inverse problem, Physics must be present in each method, in each choice, so as to justify the strategy which is used in the study.

JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS VOLUME 41, NUMBER 6 JUNE 2000

Past and future of inverse problems

Pierre C. Sabatier
Laboratoire de Physique Mathématique et Théorique, CNRS-UMR 5825, Université de Montpellier II, 34095 Montpellier Cedex 5, France

(Received 22 October 1999; accepted for publication 28 January 2000)

Inverse problems are those where a set of measured results is analyzed in order to get as much information as possible on a ''model'' which is proposed to represent a system in the real world. Exact inverse problems are related to most parts of mathematics. Applied inverse problems are the keys to other sciences. Hence the field, which is very wealthy, yields the best example of interdisciplinary research but it has nevertheless a strong individuality. The obtained results and explored directions of the 20th century are sketched in this review, with attempts to predict their evolution. [S0022-2488(00)00106-7]