18

CORRESPONDENCIA BIUNÍVOCA ENTRE FUNCIONES ORTOGONALES DIFERENTES, EN AMBOS ESPACIOS

NUCLEO COMO FUNCION GENERATRIZ DE FUNCIONES ORTOGONALES

EL NUCLEO $k(x, y)$ DEPENDE

DE UNA VARIABLE INPUT $\bar{x}$

QUE PUEDE SER BIDIMENSIONAL (x_1, x_2)

O UNA DIRECCION $\bar{n}'$

Y DE UNA VARIABLE OUTPUT $\bar{y}$

QUE PEDE SER BIDIMENSIONAL (y_1, y_2)

O UNA DIRECCION $\bar{n}$

AMBAS DIRECCIONES, BIEN EN EL PLANO, BIEN EN EL ESPACIO.

EN MUCHOS CASOS ES POSIBLE DESCOMPONER EL CITADO NUCLEO $k(x, y)$ EN SUMA DE PRODUCTOS

DE UNA FUNCION DEFINIDA EN EL ESPACIO INPUT

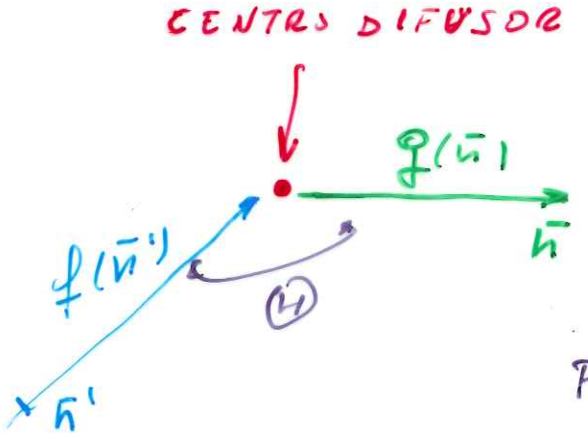
POR OTRA FUNCION DEFINIDA EN EL ESPACIO OUTPUT

AMBAS PUEDEN SER ORTOGONALES EN SUS ESPACIOS RESPECTIVOS.

ELLO NOS PERMITIRÁ RESOLVER LA INVERSION DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL, TAL Y COMO HEMOS VISTO ANTERIORMENTE, SOLO QUE AMBAS FUNCIONES, GENERALMENTE DIFERENTES, NO TIENEN POR QUE SER FUNCIONES PROPIAS DEL OPERADOR.

EJEMPLO

SCATTERING CLASICO



$\Theta = \sphericalangle(\bar{n}', \bar{n})$

$\cos\Theta = \bar{n}' \cdot \bar{n}$

PROBABILIDAD DE DIFUSIÓN

$P(\bar{n}' \to \bar{n}) = P(\cos\Theta) = P(\mu)$

$\mu \equiv \cos\Theta$

$$g(\bar{n}) = \oint d\bar{n}' \, P(\bar{n}', \bar{n}) \, f(\bar{n}')$$

A EN EL PLANO $\quad \bar{n}' \to \theta' \quad d\bar{n}' \to d\theta$

$\bar{n} \to \theta$

$\Theta = \theta - \theta'$

$$g(\theta) = \int_0^{\pi} d\theta' \, P(\cos\Theta) \, f(\theta')$$

$$P(\mu) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(\mu) \equiv \sum_{k=0}^{N} a_k \cos k\Theta$$

CHEBYSHEV 1^a especie

DESARROLLO MUY FACIL, CONOCIDA LA PROBABILIDAD $P(\mu)$

$\mu = \cos\Theta = \cos(\theta - \theta') \qquad -1 \le \mu \le 1$

ENTONCES

$$P(\mu) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \left[\cos k\theta \cos k\theta' + \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen} k\theta' \right]$$

ENTONCES

$$g(\theta) = a_0 \int_0^{\pi} I(\theta')\,d\theta' + \sum_{k=1}^{N} a_k \left[\cos k\theta \int_0^{\pi} \cos k\theta' \, I(\theta')\,d\theta' + \operatorname{sen} k\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen} k\theta' \, I(\theta')\,d\theta' \right]$$

SI DESARROLLAMOS LOS DATOS EN FOURIER:

$$g(\theta) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{N} \left[\beta_k^c \cos k\theta + \beta_k^s \operatorname{sen} k\theta \right]$$

EL DESARROLLO CORRESPONDIENTE PARA LA SOLUCIÓN $I(\theta')$

$$I(\theta') = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N} \left[\alpha_k^c \cos k\theta' + \alpha_k^s \operatorname{sen} k\theta' \right]$$

será

$$\alpha_0 \sim \int_0^{\pi} I(\theta')\,d\theta' = \frac{\beta_0}{a_0}$$

$$\alpha_k^c \sim \int_0^{\pi} I(\theta') \cos k\theta' \,d\theta' = \frac{\beta_k^c}{a_k}$$

$$\alpha_k^s \sim \int_0^{\pi} I(\theta') \operatorname{sen} k\theta' \,d\theta' = \frac{\beta_k^s}{a_k}$$

Tenemos pues los coeficientes de la función incidente

$$I(\theta') \doteq f(\theta')$$

en función de los correspondientes coeficientes del desarrollo de la función emergente $g(\theta)$.

EL NUCLEO APROXIMADO: DEGENERADO SUMA DE PRODUCTOS DE FUNCIONES ORTOGONALES

$$\operatorname{sen}\theta / \cos\theta \qquad \operatorname{sen}\theta' / \cos\theta'$$

SON FUNCIONES PROPIAS PORQUE SE CORRESPONDEN UNA A UNA, Y SON IGUALES

PERO APARECEN SIN TENER EN CUENTA LA ECUACIÓN CARACTERISTICA.

(B) EN EL ESPACIO

NORMALIZACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE SCATTERING

$$\oint P(\bar{n}', \bar{n})\, d\bar{n}' = \oint P(\bar{n}', \bar{n})\, d\bar{n} = 1$$

$\bar{n} \equiv (n_x, n_y, n_z) \rightarrow (\theta, \varphi)$

$\bar{n}' \equiv (n'_x, n'_y, n'_z) \rightarrow (\theta', \varphi')$

$n_x = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \qquad n'_x = \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi'$

$n_y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \qquad n'_y = \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varphi'$

$n_z = \cos\theta \qquad n'_z = \cos\theta'$

$d\hat{n} = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad d\hat{n}' = \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, d\varphi'$

$$P(\bar{n}', n) = P(\cos\Theta) \qquad \Theta = \sphericalangle(\bar{n}', \bar{n})$$

$$\cos\Theta = \bar{n}' \cdot \bar{n}$$

$$\cos\Theta = \cos\theta \cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

DESARROLLO EN POLINOMIOS DE LEGENDRE:

$$P(\cos\Theta) = \sum_{\ell=0}^{N} a_\ell P_\ell(\cos\Theta)$$

TEOREMA DE ADICIÓN

$$P_l(\cos\Theta) = P_l(\cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varphi-\varphi'))$$

$$= P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta') +$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos[m(\varphi-\varphi')]$$

$$= \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{m=l}(-1)^m Y_l^m(\theta,\varphi)\,Y_l^{-m}(\theta',\varphi')$$

TENEMOS DESCOMPUESTA LA PROBABILIDAD $P(\cos\Theta)$ EN SUMAS DE PRODUCTOS DE FUNCIONES ORTOGONALES EN EL ESPACIO:

$$Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad Y_l^{-m}(\theta',\varphi')$$

NOS PERMITE RESOLVER EL PROBLEMA IGUALMENTE DE FÁCIL QUE ANTERIORMENTE EN EL PLANO.

AHORA YA NO ES DIRECTAMENTE FOURIER, PERO ES LO MISMO.

EJEMPLO

HARMONIC CONTINUATION

SEA UNA FUNCIÓN $f(r,\theta)$ SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE.

SI CONOCEMOS SU COMPORTAMIENTO EN UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO $r=1$ - LIMITE DE UN CIRCULO $r<1$ -

$$h(\varphi) \equiv f(r=1,\varphi)$$

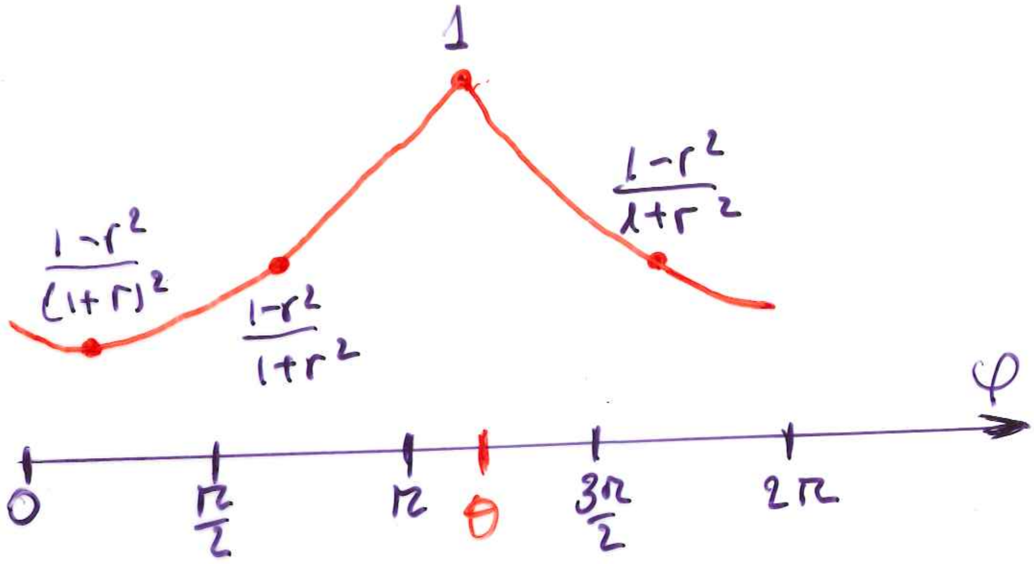
ES FACIL DE CALCULAR EL COMPORTAMIENTO DE $f(r,\theta)$, PARA CUALQUIER $r<1$:

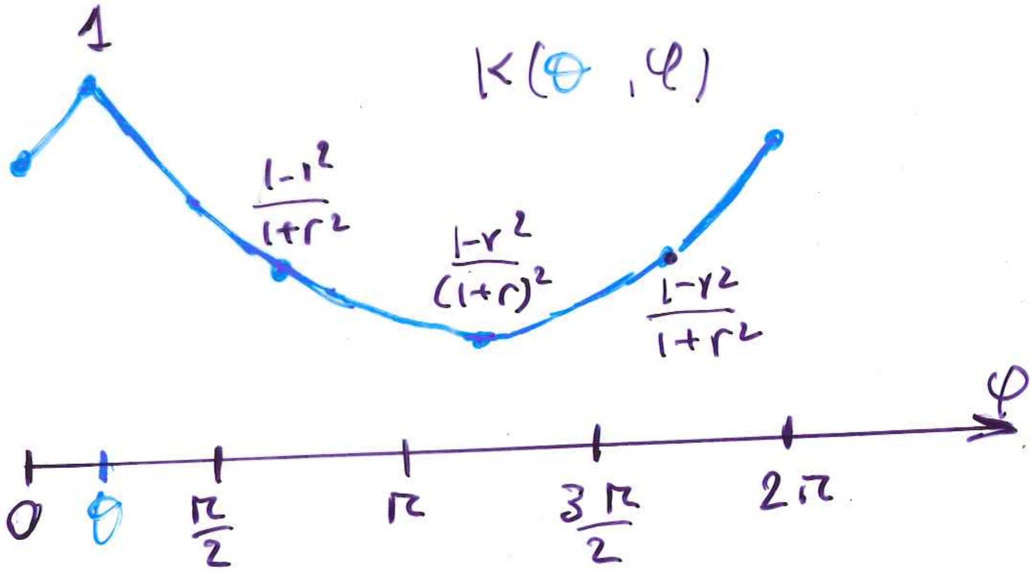
$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, h(\varphi)\, d\varphi$$

POISSON

SE TRATA DEL PROBLEMA INVERSO: ENCONTRAR EL COMPORTAMIENTO EN LA CIRCUNFERENCIA, CONOCIDA $f(\theta) \equiv f(R,\theta)$, ES DECIR EL COMPORTAMIENTO DE $f(r,\theta)$ PARA $r=R<1$.

$K(\theta, \varphi)$





PARA $r=0$ $\quad K(\theta, \varphi) = 1$

$$f(r=0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi$$

FACIL DE CALCULAR $f(r=0, \theta)$

(independiente de θ)

Pero, EL INVERSO ?

Sólo calcularemos $\int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi$ VALOR MEDIO

DIAGONALIZACIÓN DEL NUCLEO

DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL:

$$\theta - \varphi \equiv \alpha \qquad \cos\alpha = \mu \qquad (-1 \leq \mu \leq 1)$$

$$\pi K(\theta,\varphi) \equiv \frac{\frac{1-r^2}{2}}{1-2r\mu+\mu^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1-r\mu}{1-2r\mu+r^2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n T_n(\mu) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n T_n(\mu)$$

$T_n(\mu)$ Polinomios de TCHEBICHEFF

$$T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$$

$$T_n[\cos(\theta-\varphi)] = \cos n\theta \cos n\varphi + \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} n\varphi$$

O SEA

$$\pi K(\theta,\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\cos n\theta \cos n\varphi + \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} n\varphi\right]$$

ENTONCES

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \left\{ \cos n\theta \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} n\theta \int_0^{2\pi} h(\varphi) \operatorname{sen} n\varphi \, d\varphi \right\}$$

ENCONTRAMOS LOS COEFICIENTES EN SERIE DE FOURIER DE $h(\varphi)$:

SI

$$h(\varphi) = \frac{1}{2} h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_n^c \cos n\varphi + h_n^s \operatorname{sen} n\varphi \right]$$

$$h_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi$$

$$h_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos n\varphi \; d\varphi$$

$$h_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \operatorname{sen} n\varphi \; d\varphi$$

SERÁ

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2} h_0 + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[h_n^c \cos n\theta + h_n^s \operatorname{sen} n\theta \right]$$

EL DESARROLLO DE FOURIER
LOS MISMOS COEFICIENTES
MULTIPLICADOS POR SU RESPECTIVO
r^n

DIRECTO
$$h_n^c \to r^n h_n^c$$
$$h_n^s \to r^n h_n^s$$

INVERSO
$$f_n^c \to h_n^c = f_n^c / r^n$$
$$f_n^s \to h_n^s = f_n^s / r^n$$

PROBLEMAS SI $r \to 0$, PARA LAS ALTAS FREQ.

NOS ENCONTRAMOS

PARA r PEQUEÑOS $r \ll 1$

CON UN PROBLEMA MANIFIESTAMENTE
MAL CONDICIONADO

SI r PEQUEÑO $r \ll 1$

$K(\theta, \varphi) = 1$ INDEPENDIENTE
DE θ, φ

SE TRATA DE UN NUCLEO
PRACTICAMENTE CONSTANTE:

PROMEDIA - DESTRUYE -
TODA LA INFORMACIÓN
CONTENIDA EN $h(\varphi)$

RECUPERAR ESTA INFORMACIÓN
PRESENTA MUCHOS RIESGOS.

EJEMPLO : ABEL INTERVALO INFINITO

$$\sigma(R) = \int_R^\infty \rho(r) \frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2-R^2}}$$

$\sigma(R)$ PAR $\to$ $\sigma(R^2)$

SI EN EL ESPACIO DE LAS IMAGENES TENEMOS LA FUNCIÓN

$$\phi_n(R) = e^{-R^2} H_{2n}(R)$$

HERMITE

TIENE PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD: CUALQUIER $\sigma(R^2)$ SE PUEDE APROXIMAR EN LA FORMA

$$\sigma(R^2) \simeq \sum_{J=0}^{N} \beta_n \phi_n(R)$$

LA FUNCIÓN CORRESPONDIENTE EN EL ESPACIO DE LOS OBJETOS ES

$$\psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2n} n! (-1)^n e^{-r^2} L_n(r^2)$$

$$L_n(r^2) = L_n^{(0)}(r^2) \quad \text{LAGUERRE}$$

TIENE PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD: CUALQUIER $\rho(r)$ SE PUEDE DESCOMPONER EN LA FORMA

$$\rho(r) \simeq \sum_{J=0}^{N} \alpha_n \psi_n(r)$$

$$\alpha_n = \beta_n$$

ABEL (ESPECTRAL)

$$I(R) = \int_R^\infty \rho(r) \frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

$$R^2 = y \qquad r^2 = x$$

$$I(y) = \int_y^\infty \rho(x) \frac{dx}{\sqrt{x-y}}$$

Si $\rho(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{N} c_n L_n(x)$

LAGUERRE (ORTOGONALES)

$$x - y = z$$

$$I(y) = e^{-y} \sum_{n=0}^{N} C_n \int_0^\infty e^{-z} \frac{1}{\sqrt{z}} L_n(z+y)\, dz$$

PERO

$$L_n(z+y) = \sum_{j=0}^{n} L_j^{(-\frac{1}{2})}(z)\, L_{n-j}^{(-\frac{1}{2})}(y)$$

CON LO CUAL

$$I(y) = e^{-y} \sum_{n=0}^{N} C_n L_{n-J}^{(-\frac{1}{2})}(y) \,*$$

$$* \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} L_J^{(-\frac{1}{2})}(z)\, dz$$

ESTA INTEGRAL ES SÓLO NO NULA SI $J=0$, QUE VALE $\sqrt{\pi}$

LUEGO

$$I(y) = \sqrt{\pi} e^{-y} \sum_{n=0}^{N} C_n L_n^{(-\frac{1}{2})}(y)$$

O BIEN

$$I(R) = \sqrt{\pi}\, e^{-R^2} \sum_{n=0}^{N} C_n L_n^{(-\frac{1}{2})}(R^2)$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{-R^2} \sum_{n=0}^{N} C_n \frac{(-1)^n}{2^n n!} H_{2n}(R)$$

Y SÍ $I(R)$ SE DESARROLLA EN UNA SERIE DE FUNCIONES ORTOGONALES COMO LA ANTERIOR

$$\rho(r) = e^{-r^2} \sum_{n=0}^{N} C_n L_n(r^2)$$

EJEMPLO: ABEL INTERVALO FINITO

$$g(y) = \int^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{x-y}}\, dx$$

SI EN EL ESPACIO DE LAS IMAGENES TENEMOS LA FUNCIÓN

$$\phi_n(y) = \sqrt{1-y}\ \tilde{P}_n^{(\frac{1}{2},0)}(y)$$

JACOBI DESPLAZADO

$0 \leq y \leq 1$

TIENE PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD: CUALQUIER $g(y)$ SE PUEDE APROXIMAR EN LA FORMA

$$g(y) = \sum_{j=1}^{N} \beta_n \phi_n(y)$$

LA FUNCIÓN CORRESPONDIENTE EN EL ESPACIO DE LOS OBJETOS ES

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{n!}\ \tilde{P}_n^{(0,\frac{1}{2})}(x)$$

JACOBI DESPLAZADO

TIENE PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD: CUALQUIER $f(x)$ SE PUEDE DESCOMPONER EN LA FORMA

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_n \psi_n(r)$$

$$\alpha_n = \beta_n$$

CONVOLUCIÓN GAUSSIANA

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2} f(x)\, dx$$

$f(x)$ Y COMO CONSECUENCIA (CONSECUENCIA RECÍPROCA) $g(y)$ TIENEN ESTRUCTURA POLINÓMICA

LOS POLINOMIOS DE HERMITE $H_n(x)$ SON ORTOGONALES CON LA FUNCIÓN PESO GAUSSIANA

SABEMOS QUE

$$H_n\left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right) \doteq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \left[H(y) + H(z) \right]^n$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(y)\, H_{n-k}(z)$$

ENTONCES

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} H_n\left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} H_{n-k}(z)$$

ESTA ULTIMA INTEGRAL VALE 0 SI $n-k \neq 0$ Y VALE 1 SI $n-k=0$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} H_n(y)$$

LUEGO SI:

$$g(y) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n H_n(y)$$

SERÁ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\beta_n}{2^{\frac{n}{2}}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

DIAGONALIZACIÓN DEL NUCLEO:

CORRESPONDENCIA BIUNIVOCA ENTRE POLINOMIOS ORTOGONALES EN UNO Y OTRO ESPACIO.

CONCLUSIÓN

- ES DIFÍCIL DECIR EN QUE CASOS:

  PARA QUE OPERADORES

  Y CON QUE FUNCIONES ORTOGONALES

  $\varphi_J(x)$, $\psi_J(y)$ VA A PODER DESARROLLARSE

  ~~UN~~ NUCLEO $K(X,Y)$ EN LA FORMA

$$K(X,Y) \simeq \sum_{J=1}^{NJ} C_J\, \varphi_J(x)\, \psi_J(y)$$

SUMANDOS FACTORIZABLES

SE TRATA DE UNA REPRESENTACIÓN PURAMENTE **DIAGONAL** DEL OPERADOR EN TÉRMINOS DE FUNCIONES ORTOGONALES NO PROPIAS

SE PODRÁN CONSIDERAR COMO **F**UNCIONES PROPIAS GENERALIZADAS (LANCZOS) DEL OPERADOR APROXIMADO: LA SERIE DEL SEGUNDO MIEMBRO

- PERO EN MUCHOS CASOS SE LOGRA