17

FORMALISMOS MIXTOS

ESPECTRALES Y
ORDENADAS DISCRETAS.

17 - 1

RESUMEN
VENTAJAS Y DIFICULTADES
DE LOS FORMALISMOS
ANTERIORES

EN EL CASO DE UNA REPRESENTACIÓN MATRICIAL VIA ORDENADAS DISCRETAS DEL OPERADOR

$$\int_a^b K(x,y) \ldots \, dx$$

- NO CONOCEMOS "A PRIORI" LA DIMENSION OPTIMA DEL SISTEMA EN RELACION CON LA EXISTENCIA DE AUTOVALORES MUY PEQUEÑOS

- INTERVIENE TODO EL NUCLEO EN EL PLANTEO, Y EN LA INVERSIÓN - ¡RIESGOS!

PERO SE PUEDE ESCRIBIR EL FORMALISMO MATRICIAL DE UNA MANERA SISTEMATICA

EN LOS ESQUEMAS VIA ORDENADAS DISCRETAS CON MUCHOS O POCOS VALORES PARA $Y_k \to g(Y_k)$

TODOS LOS $g(Y_k)$ CONTIENEN SU ERROR CORRESPONDIENTE

Y SI SON MUCHOS LOS VALORES DE $Y_k \to g(Y_k)$ SUPONDRÁ QUE TRANSMITIMOS (Y AMPLIFICAMOS) LOS ERRORES, E IMPRECISIONES NUMERICAS, DE ALTA FRECUENCIA (MUCHOS PUNTOS PARA Y_k), CON LO CUAL LA CATASTROFE ES SEGURA

QUEDA LA POSIBILIDAD DE TRABAJAR CON MAS DATOS QUE INCOGNITAS "A MINIMOS CUADRADOS

EN EL CASO DE UNA REPRESENTACIÓN VIA DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

ESTRICTA PARA OPERADORES SIMÉTRICOS

SINGULAR PARA MUCHOS OPERADORES NO SIMÉTRICOS

PRESENTA (a mi juicio) MUCHAS VENTAJAS:

— SE CONTROLA A PRIORI LA DIMENSIÓN NUMERICA DEL PROBLEMA, PARA EVITAR INESTABILIDADES DEBIDAS A LA EXISTENCIA DE AUTOVALORES MUY PEQUEÑOS QUE, POR OTRO LADO, SE CONOCEN A PRIORI

EN CIERTO MODO, EL AJUSTE DE LA FUNCION DATO $g(y)$ EN SERIE DE FUNCIONES ORTOGONALES $\varphi_k(y)$:

$$g(y) = \sum_k \beta_k \psi_k(y)$$

IMPLICA UN "ALISAMIENTO": (FILTRO) DE LOS DATOS.

NO ES CONVENIENTE QUE EL ORDEN DE ESTE DESARROLLO SEA MUY GRANDE:

A MAYOR ORDEN: AUTOVALORES MÁS PEQUEÑOS $\Rightarrow$ MAYOR RIESGO DE INESTABILIDAD

CRITERIOS PARA ELEGIR LA DIMENSIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA: CONOCIDOS LOS AUTOVALORES λ_k, O μ_k^2

TENDRÁ POCAS IRREGULARIDADES

PROMEDIO QUE PUEDE SER TAN BUENO FISICAMENTE COMO LOS PROPIOS DATOS TABULADOS

ES UNA DIFERENCIA MUY IMPORTANTE

POR OTRO LADO:

EN EL MÉTODO DE LA DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL NO INTERVIENE, NADA MÁS QUE LA PARTE DEL OPERADOR QUE HA GENERADO LOS DATOS

PERO ES MUY DIFICIL DE REALIZAR PARA UN OPERADOR DADO CUALQUIERA

A NO SER QUE CONSTRUYAMOS ALGORITMOS MIXTOS

17.2

$g(y)$ FILTRADA VIA FUNCIONES ORTOGONALES

UTILIZANDO, DESPUES, LOS VALORES DE $g^*(y_k)$ EN ORDENADAS DISCRETAS

$g^*(y)$ DESARROLLO DE $g(y)$

① - FILTRO DE ERRORES EN $g(\gamma)$

SE PUEDE APROVECHAR UN DESARROLLO EN SERIE DE $g(\gamma)$ DEL TIPO

$$g(\gamma) \simeq \sum_{K=1}^{N} \beta_K \,\psi_K(\gamma) \equiv g_a(\gamma)$$

COMO UNA COMBINACION LINEAL FINITA DE CIERTAS FUNCIONES ORTOGONALES $\psi_K(\gamma)$

EN EL CUAL HEMOS FILTRADO ERRORES Y/O IRREGULARIDADES DE ALTA FRECUENCIA

PARA UTILIZAR, EN UN ESQUEMA DE ORDENADAS FINITAS: LO MEJOR, PRODUCT INTEGRATION METHOD, COMO FUNCION DATO, CON LAS MEJORES CONDICIONES POSIBLES

O SEA, UTILIZAR $g_a(\gamma)$ EN LUGAR DE $g(\gamma)$ EN EL PRODUCT INTEGRATION METHOD

EN CIERTO MODO SE TRATA DE UN **FILTRO** ESPECTRAL

EL CITADO ALISAMIENTO DE LOS DATOS $g(y)$ NO OCURRE CON LOS MÉTODOS DIRECTOS MATRICIALES DE ORDENADAS DISCRETAS: DONDE LOS DATOS $g(y_k)$ SE TOMAN COMO TALES EN CADA UNA DE LAS ECUACIONES (A NO SER QUE TRABAJEMOS – VIA MINIMOS CUADRADOS – CON MAS DATOS $g(y_k)$ QUE INCOGNITAS $f(x_j)$, ES DECIR, CON MAS ECUACIONES QUE INCOGNITAS)

CON EL MÉTODO DE LA DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL, SI TOMAMOS POCAS FUNCIONES BASE $\{\psi_k(y)\}$ PARA REPRESENTAR $g(y)$ ESTAREMOS USANDO UN "PROMEDIO" DE $g(y)$ QUE

RESUMEN DE LA METODOLOGÍA DE LA DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

$$g(y) = \int_a^b K(x, y) f(x)\, dx$$

SI $\varphi_K(x)$ Y $\psi_K(y)$ SON FUNCIONES PROPIAS: ESTRICTAS / SINGULARES O TALES QUE SE CORRESPONDEN BIUNÍVOCAMENTE EN LOS DOS MIEMBROS DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL, CON EL VALOR PROPIO μ_K^2

SI

$$g(y) = \sum_K \beta_K \psi_K(y)$$

SERÁ

$$f(x) = \sum_K \frac{\beta_K}{\mu_K^2} \varphi_K(x)$$

VENTAJAS

- RECONOCIMIENTO DEL GRADO DE PRECISIÓN NECESARIO PARA DESCRIBIR $g(y)$ EN TÉRMINOS OPERATIVOS: COMO DESARROLLO EN SERIE DE $\{\psi_K(y)\}$
- UTILIZACIÓN, PARA LA INVERSIÓN, SOLAMENTE DE LA PARTE DEL OPERADOR INTEGRAL NECESARIA PARA EXPLICAR ESE DESARROLLO.

17 - 3

$g(y)$ DESARROLLADA EN

FUNCIONES ORTOGONALES

UTILIZANDO LOS COEFICIENTES

DEL DESARROLLO

(B) – PERO, MUCHO MÁS IMPORTANTE, Y PENSANDO EN UN ESQUEMA, MATRICIAL, DE ORDENADAS DISCRETAS SE PUEDEN UTILIZAR DIRECTAMENTE LOS COEFICIENTES β_k EN LUGAR DE LOS VALORES DISCRETOS DE LA FUNCION $g(y)$, O DE SU APROXIMACIÓN $g_a(y)$, EN LOS PUNTOS y_k

ERA

$$g(y) = \int_a^b k(x, y) f(x) dx$$

SI CONOCEMOS UN CONJUNTO DE FUNCIONES ORTOGONALES $\{\varphi_k(y)\}$ (PROPIAS ESTRICTAS/SINGULARES O NO) EN LAS CUALES PUEDA DESARROLLARSE $g(y)$ EN LA FORMA

$$g(y) = \sum_k \beta_k \varphi_k(y)$$

$\varphi_k(y)$ NORMALIZADAS

SERA

$$\beta_k = \int_A^B g(y)\, \psi_k(y)\, dy$$

$\psi_k(y)$ SERA DEL TIPO

- POLINOMIO $P_k(y)$

  SI EL INTERVALO (A, B) EN EL QUE EXISTE LA FUNCION $g(y)$ ES FINITO $A < y < B$

  MEJOR $-1 \leq y \leq 1$; $[0 \leq y \leq 1]$

- DEL TIPO

  e^{-y}. POLINOMIO $e^{-y} P_k(y)$

  SI EL INTERVALO (A, B) ES

  $0 \leq y < \infty$

- DEL TIPO

  e^{-y^2}. POLINOMIO $e^{-y^2} P_k(y)$

  SI EL INTERVALO (A, B) ES

  $-\infty < y < \infty$

SI $$g(y) = \sum_{K=1}^{N} \beta_K \, \psi_K(y)$$

DONDE $\{\psi_K(y)\}$ SON CONOCIDAS NORMALIZADAS

$$\beta_K = \int_A^B g(y) \, \psi_K(y) \, dy$$

$$= \int_A^B dy \, \psi_K(y) \int_a^b K(x,y) \, f(x) \, dx$$

$$= \int_a^b dx \, f(x) \int_A^B dy \, \psi_K(y) \, K(x,y)$$

SI

$$\mathcal{X}_K(x) \equiv \int_A^B dy \, \psi_K(y) \, K(x,y)$$

(* VER DETRAS)

SERA

$$\beta_K = \int_a^b dx \, f(x) \, \mathcal{X}_K(x)$$

CADA UNO DE LOS N DATOS β_K ES IGUAL A LA INTEGRAL DE $f(x)$ MULTIPLICADA POR UNA FUNCION CONOCIDA $\mathcal{X}_K(x)$ DIFERENTE PARA CADA K.

* LAS FUNCIONES

$$\mathcal{X}_K(x) \equiv \int_A^B dy\, \varphi_K(y)\, K(x, y)$$

CON $\varphi_K(y)$ FUNCION PERTENECIENTE A UNA BASE ORTONORMAL CONOCIDA Y CON EL NUCLEO $K(x, y)$ QUE DEFINE EL PROBLEMA

PUEDEN CALCULARSE ANALITICAMENTE, SI EL NUCLEO ES SENCILLO O PUEDE CALCULARSE NUMERICAMENTE

UNA INTEGRAL, AUNQUE SEA NUMERICA ES UNA OPERACIÓN DETERMINISTA Y RELATIVAMENTE FACIL

ENTONCES, TENEMOS QUE

$$\beta_K = \int_a^b f(x)\, \mathcal{X}_K(x)\, dx$$

β_K $K = 1, 2 \ldots N$ DATOS

LAS FUNCIONES $\mathcal{X}_K(x)$ CONOCIDAS GENERALMENTE TABULADAS EN UNA SERIE DE PUNTOS X_J

PODREMOS ENCONTRAR UN SISTEMA LINEAL ALGEBRAICO: MATRIZ A PARTIR DE UN MODELO PARA $f(x)$ COMO EN EL CASO DEL PRODUCT INTEGRATION METHOD

PROPONEMOS UNA SERIE DE PUNTOS

x_j EN NUMERO M IGUAL O MENOR

QUE EL NUMERO N DE COEFICIENTES

β_k $x_1 = a$, $x_M = b$

PROPONEMOS PARA $f(x)$ UN SEGMENTO

DE RECTA ENTRE CADA DOS PUNTOS

CONSECUTIVOS

$f(x)$ POLIGONAL, PIECE-WISE CONTINUA

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\, \mathcal{X}_k(x)\, dx$$

$$= \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (m_j + n_j x)\, \mathcal{X}_k(x)\, dx$$

$$m_j + n_j x = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j)$$

$$m_j = \frac{f(x_j)\, x_{j+1} - f(x_{j+1})\, x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

$$n_j = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

$$\beta_K = \sum_{J=1}^{M-1} m_J \int_{x_J}^{x_{J+1}} \mathcal{H}_K(x)\,dx + n_J \int_{x_J}^{x_{J+1}} x\,\mathcal{H}_K(x)\,dx$$

SI $\mathcal{H}_K(x)$ SON ANALITICAS CADA UNA DE LAS INTEGRALES ANTERIORES SE HACE ANALITICAMENTE.

SI NO LO SON SE PUEDEN HACER NUMERICAMENTE YA QUE LAS $\mathcal{H}_K(x)$ SON CONOCIDAS. SE PUEDE ADMITIR QUE, TAMBIÉN, VARÍAN LINEALMENTE ENTRE CADA DOS PUNTOS CONSECUTIVOS

EN CUALQUIER CASO, DADA LA FORMA DE m_J Y n_J

SE ENCUENTRAN FACILMENTE LOS COEFICIENTES C_{KJ} DE LAS ECUACIONES

$$\beta_K = \sum_{J=1}^{M} C_{KJ}\, f(x_J)$$

$K = 1, 2, \cdots N$

$J = 1, 2, \cdots M$

$M \leq N$

SI $N > M$ SE RESUELVE POR MINIMOS CUADRADOS

PERO SI SE HA ELEGIDO UNA N NO MUY ALTA COMO PARA QUE EL DESARROLLO

$$g(y) \simeq \sum_{k=1}^{N} \beta_k \psi_k(y)$$

SEA LO SUFICIENTEMENTE "LISO":

NO TENGA IRREGULARIDADES (COMPONENTES $\psi_k(y)$) DE MUY ALTA FRECUENCIA,

PODREMOS ELEGIR $M = N$

SIN MUCHO TEMOR

NO SERÁN NECESARIO RESOLVER POR MÍNIMOS CUADRADOS

DE ESTA MANERA HEMOS UTILIZADO UN FORMALISMO, UNA REPRESENTACION, SIMILAR A LA DEL PRODUCT INTEGRATION METHOD PARA $f(x)$ Y HEMOS ENCONTRADO EL SISTEMA ALGEBRAICO CORRESPONDIENTE

PERO SÓLO UTILIZAMOS LA PARTE DEL NUCLEO $K(x,y)$ QUE GENERA LA APROXIMACION

$$g_a(y) \simeq \sum_{k=1}^{N} \beta_k \, \varphi_k(y)$$

DE LA $g(y)$ DADA

LA PARTE DEL NUCLEO QUE CORRESPONDE A LAS ALTAS FRECUENCIAS: $k > N$ NO HA SIDO UTILIZADA

ESTO ESTABILIZA EXTRAORDINARIAMENTE LA INVERSIÓN.

17-4

MOMENTOS DE $g(y)$

LA IDEA DE LA DESCOMPOSICION ESPECTRAL, BIEN ESTRICTA, BIEN SINGULAR, QUE PERMITE DIAGONALIZAR EL NUCLEO $K(x,y)$ EN LA FORMA

$$K(x,y) = \sum_{k=1} \mu_k^2 \varphi_k(x) \psi_k(y)$$

Y CON ELLO CONSEGUIR UNA INVERSION INMEDIATA

ES GENERALIZABLE:

PODEMOS, A VECES, ENCONTRAR FUNCIONES $\varphi_k(x)$ Y $\psi_k(y)$ QUE NO SON FUNCIONES PROPIAS DEL OPERADOR

$$\int_a^b K(x,y) \ldots \, dx$$

NI ESTRICTAS, NI SINGULARES

PERO QUE SE CORRESPONDEN BIUNIVOCAMENTE EN LA CORRESPONDIENTE TRANSFORMADA INTEGRAL:

$$\int_a^b K(x,y)\,\varphi_k(x)\,dx = \lambda_k\,\psi_k(y)$$

AHORA $\varphi_k(x)$, $\psi_k(y)$ Y λ_k

NO SON PROPIOS

Y SON ORTOGONALES EN SUS RESPECTIVOS ESPACIOS.

ESTO NOS PERMITE TRABAJAR DE LA MISMA FORMA Y CON LAS MISMAS VENTAJAS QUE CON LOS MÉTODOS DE DESCOMPOSICION ESPECTRAL

(C) FORMALISMO MATRICIAL A PARTIR DE LOS MOMENTOS DE $g(y)$

ACABAMOS DE VER QUE A PARTIR DE LOS COEFICIENTES β_k DEL DESARROLLO DE LA FUNCIÓN DATO $g(y)$ EN SERIE DE FUNCIONES ORTOGONALES $\{\psi_k(y)\}$, QUE DESCRIBE DE UNA MANERA ÓPTIMA (MÍNIMOS CUADRADOS ESOS DATOS

$$g(y) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \psi_k(y)$$

PODEMOS GENERAR UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES DONDE LAS INCÓGNITAS SON LOS VALORES $f(x_j)$ DE LA FUNCIÓN INCÓGNITA $f(x)$ EN UNA SERIE DE PUNTOS x_j ESTABLECIDOS A PRIORI

¿QUE SON LOS COEFICIENTES β_k?

SI LAS FUNCIONES ORTOGONALES ψ_k ESTÁN NORMALIZADAS, SERÁ

$$\beta_k = \int_A^B g(y)\,\psi_k(y)\,dy$$

¿QUE SON LAS FUNCIONES $\psi_k(y)$?

COMO NO HEMOS IMPUESTO QUE SEAN FUNCIONES PROPIAS (ESTRICTAS O SINGULARES) DE NINGÚN OPERADOR, SINO QUE REPRESENTEN LO MAS FIELMENTE POSIBLE A CUALQUIER $g(y)$ DADO PODEMOS ELEGIR FUNCIONES MAS O MENOS ESTANDAR QUE HAYAN JUGADO ESE PAPEL EN EL CAMPO DE LA MATEMATICA

¿CÓMO SON ESAS FUNCIONES?

SI EL INTERVALO DE EXISTENCIA DE LA FUNCION $g(y)$ ES FINITO (A, B)

$\psi_k(y)$ SERÁ UN POLINOMIO $P_k(y)$ LEGENDRE, O, CUALQUIER JACOBI.

$$\psi_k(y) = P_k(y) = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell y^\ell$$

SI EL INTERVALO (A, B) ES SEMI-INFINITO $0 \leq y < \infty$

$\psi_k(y)$ SERÁ DEL TIPO $e^{-y} P_k(y)$

SIENDO $P_k(y)$ UN POLINOMIO, AHORA DE LAGUERRE

SI EL INTERVALO (A, B) ES DOBLE INFINITO $-\infty < y < \infty$

$\psi_k(y)$ SERÁ DEL TIPO $e^{-y^2} P_k(y)$

SIENDO $P_k(y)$ UN POLINOMIO. AHORA DE HERMITE

TENEMOS, PUES, PARA LOS TRES CASOS

$$\beta_K = \int_A^B g(y)\, P_K(y)\, dy = \sum_{\ell=0}^{K} a_\ell \int_A^B g(y)\, y^\ell\, dy$$

$$\beta_K = \int_0^\infty g(y)\, e^{-y}\, P_K(y)\, dy = \sum_{\ell=0}^{K} a'_\ell \int_0^\infty g(y)\, e^{-y}\, y^\ell\, dy$$

$$\beta_K = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-y^2}\, P_K(y)\, dy = \sum_{\ell=0}^{K} a''_\ell \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-y^2}\, y^\ell\, dy$$

LOS COEFICIENTES a_ℓ, a'_ℓ, a''_ℓ DE LAS POTENCIAS y^ℓ DE y EN LOS RESPECTIVOS POLINOMIOS SE CONOCEN PERFECTAMENTE: EXISTEN EXPRESIONES EXPLICITAS PARA ELLOS LO QUE PERMITE CALCULARLOS CON TODA COMODIDAD

SI NO FUERA POR LAS <u>FUNCIONES PESO</u> e^{-y} Y e^{-y^2} LAS INTEGRALES EN LOS INTERVALOS $(0, \infty)$ Y $(-\infty, +\infty)$ DIVERGERIAN

LUEGO LOS β_K EN CUALQUIERA DE LOS TRES CASOS ANTERIORES SON COMBINACIONES LINEALES DE LAS INTEGRALES

$$G_\ell = \int_A^B g(y)\, y^\ell\, y$$

$$G_\ell = \int_0^\infty g(y)\, e^{-y}\, y^\ell\, dy$$

$$G_\ell = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-y^2}\, y^\ell\, dy$$

ESTAS INTEGRALES RECIBEN EL NOMBRE DE **MOMENTOS** DE LA FUNCIÓN $g(y)$

NATURALMENTE DEFINIDOS TENIENDO EN CUENTA EL INTERVALO EN EL QUE EXISTE ESTA FUNCIÓN $g(y)$

SEA PUES EL QUE SEA EL ESPACIO EN EL QUE SE DESENVUELVE LA FUNCIÓN $g(y)$ LOS COEFICIENTES β_k DEL DESARROLLO

$$g(y) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \, \psi_k(y)$$

EN FUNCIONES ORTOGONALES $\psi_k(y)$ ESTÁNDAR: LEGENDRE (JACOBI), LAGUERRE, HERMITE

SON FUNCIONES LINEALES DE LOS RESPECTIVOS MOMENTOS G_e

CADA β_k DEPENDE LINEALMENTE DE LOS k PRIMEROS MOMENTOS

EN UN DESARROLLO EN SERIE COMO EL ANTERIOR, HASTA EL ORDEN $k = N$, NECESITAREMOS N MOMENTOS

COMO CADA G_e GENERABA UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA LINEAL DONDE LAS INCOGNITAS ERAN LOS VALORES DE LA FUNCION $f(x)$ EN UNA SERIE DE PUNTOS x_j PREFIJADOS

PARECE TOTALMENTE EQUIVALENTE HACER LO MISMO CON LOS MOMENTOS G_e DE LA FUNCIÓN $g(y)$, CON LO QUE NOS AHORRAMOS EL CALCULO DE LOS COEFICIENTES β_k

AL IGUAL QUE DICHOS COEFICIENTES, LOS MOMENTOS ESTÁN DEFINIDOS COMO INTEGRALES, Y, POR LO TANTO, EN SU CALCULO, A PARTIR DE LA FUNCIÓN $g(y)$ SE COMPENSARÁN IRREGULARIDADES, Y ERRORES, POSITIVAS Y NEGATIVAS, QUE TENGA ESTA FUNCION; LA GRAN VENTAJA DE PREPARAR LOS DATOS A PARTIR DE SUS INTEGRALES.

GUARDAMOS, PUES, LAS PROPIEDADES POSITIVAS DEL MÉTODO ANTERIOR.

CONOCIDOS, PUES, LOS VALORES DE LOS N PRIMEROS MOMENTOS DE $g(y)$:

$$G_\ell = \int_A^B g(y)\, w(y)\, y^\ell \, dy$$

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots N-1$$

$w(y) = 1$ en un caso LEGENDRE

$w(y) = e^{-y}$ en el otro LAGUERRE

$w(y) = e^{-y^2}$ en el otro HERMITE

COMO ES EL DATO EN LA TRANSFORMADA INTEGRAL

$$g(y) = \int_a^b K(x, y)\, f(x)\, dx$$

SERÁ

$$G_\ell = \int_a^b dx\, f(x) \int_A^B K(x, y)\, W(y)\, y^\ell \, dy$$

$$= \int_a^b d\, f(x)\, \chi_\ell(x)$$

DONDE

$$\chi_\ell(x) = \int_A^B K(x,y)\, W(y)\, y^\ell \, dy$$

ESTAS FUNCIONES χ (x) SE CALCULARÁN ANALITICAMENTE SI EL NUCLEO $K(x,y)$ ES SIMPLE. O NUMERICAMENTE, COMO UNA TABLA CON UN VALOR PARA CADA x_j SI EL NUCLEO ES COMPLICADO

TENEMOS, PUES, PARA CADA UNA ECUACIÓN DEL TIPO

$$G_\ell = \int_a^b dx\, f(x)\, \chi_\ell(x)$$

DONDE LAS FUNCIONES $\chi_\ell(x)$ SON CONOCIDAS: REPRESENTAN AL NUCLEO $K(x,y)$ INTEGRADO SOBRE POTENCIAS DE y.

PODEMOS ELEGIR AHORA UNA SERIE DE VALORES DISCRETOS $\{X_J\}$ $J=1,2,\ldots M$ PARA LA VARIABLE X. CON UN NÚMERO M DE PUNTOS, AL MENOS IGUAL AL NUMERO N DE MOMENTOS

SI EL NUMERO N DE MOMENTOS NO ES MUY ALTO, REPRESENTARAN A UNA APROXIMACION DE $g(y)$ LO SUFICIENTEMENTE ALISADA. NO HABRÁ RIESGO DE INTRODUCIR INESTABILIDADES EN LOS DATOS

ENTONCE SE PODRA ELEGIR UN NUMERO M PARA LOS VALORES DE X_J IGUAL AL NUMERO N DE MOMENTOS

SI EL NUMERO N DE MOMENTOS ES ALTO SE CORRE EL RIESGO (COMO EN EL CASO DE LOS COEFICIENTES β_K) DE INTRODUCIR, EN LOS DATOS, INFORMACIÓN QUE CORRESPONDA A IRREGULARIDADES

Y ERRORES, Y NO CONVENDRÍA CALCULAR $f(x)$ EN UN NUMERO M DE VALORES DE x_j TAN ALTO COMO EL NUMERO N DE MOMENTOS.

RESOLVERÍAMOS ENTONCES POR MINIMOS CUADRADOS.

PERO AQUÍ, COMO EN EL CASO EN QUE SE TRABAJABA CON LOS COEFICIENTES β_k, SE PUEDE VER DIRECTAMENTE SOBRE LOS MOMENTOS G_e CUANDO NO INTRODUCIMOS YA MAS INFORMACION UTIL DE $g(y)$.

CUANDO LA DIFERENCIA NUMERÍCA ENTRE UN MOMENTO G_e Y EL SIGUIENTE G_{e+1} SEA DEL ORDEN DE LOS ERRES QUE PRESUMIBLEMENTE SE SUPONEN EN $g(y)$, MÁS VALE NO CALCULAR YA MÁS MOMENTOS.

CRITERIO PARA SUPRIMIR INESTABILIDADES

TENEMOS LOS **N** PRIMEROS MOMENTOS

G_ℓ $\ell = 0, 1, 2, \ldots N-1$ DE LA FUNCIÓN

$g(y)$

HEMOS CALCULADO LAS FUNCIONES

$\chi_\ell(x)$ A PARTIR DEL NUCLEO $K(x, y)$

DISPONEMOS, PUES, DE N ECUACIONES

$$G_\ell = \int_a^b dx\, f(x)\, \chi_\ell(x)$$

AHORA PROPONEMOS PARA $f(x)$ UN MODELO FUNCIONAL, POR EJEMPLO: UN SEGMENTO DE RECTA ENTRE CADA DOS PUNTOS CONSECUTIVOS x_j Y x_{j+1} DE UN CONJUNTO DE ORDENADAS DISCRETAS $\{x_j\}$

$f(x)$ POLIGONAL : PIECE-WISE CONTINUA

PARA CADA PAR (x_j, x_{j+1})

$$f(x) = m_j + n_j x \qquad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

$$m_j = \frac{f(x_j)\, x_{j+1} - f(x_{j+1})\, x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

$$n_j = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

ENTONCES, CADA

$$G_\ell = \sum_{J=1}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{J+1}} dx\, f(x)\, \chi_\ell(x) =$$

$$= \sum_{J=1}^{M-1} \left[m_J \int_{x_j}^{x_{J+1}} dx\, \chi_\ell(x) + n_J \int_{x_J}^{x_{J+1}} dx\, x\, \chi_\ell(x) \right]$$

CON LO CUAL, A PARTIR DE LAS FUNCIONES $\chi_\ell(x)$ TENDREMOS LOS COEFICIENTES $C_{\ell J}$ DE LAS N ECUACIONES ALGEBRAICAS LINALES

$$G_\ell = \sum_{J=1}^{N} C_{\ell J}\, f(x_J)$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots N-1$$
$$J = 1, 2, \dots M$$

PUEDE SER MUY BIEN. $M = N$

DE ESTA FORMA, A PARTIR DEL CONTROL DE LA CALIDAD DE LA INFORMACION, QUE, DE LOS DATOS ORIGINALES $g(y)$, VAMOS A UTILIZAR

– VIA EL ESTUDIO DE SUS MOMENTOS G_ℓ – TENEMOS UNA FORMA, QUIZAS LA MÁS CÓMODA Y SEGURA – DE PLANTEAR UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES, DE CUYA SOLUCIÓN OBTENDREMOS LOS VALORES DE LA FUNCIÓN INCOGNITA $f(x)$ EN UNA SERIE DE PUNTOS $\{x_j\}$

LO MAS IMPORTANTE ES QUE

- RETENEMOS DEL NUCLEO $K(x,y)$ SOLAMENTE LA PARTE NECESARIA PARA EXPLICAR LOS DATOS

- EN CIERTO MODO, LAS FUNCIONES $\chi_e(x)$ SON LOS y-MOMENTOS DEL NUCLEO $K(X,Y)$

CADA UNA DE ELLAS INTERVIENE EN UNA ECUACION DIFERENTE.

ES UNA MANERA DE SELECCIONAR PARA CADA ECUACION, UNA INFORMACIÓN DEL NUCLEO LINEALMENTE INDEPENDIENTE DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN LAS OTRAS ECUACIONES